ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercices Banque CCINP

1 **CCINP 31**

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

2 **CCINP 32** Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

3 **CCINP 42** On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \qquad (H)$$
$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

4 **CCINP 74**

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

5 **CCINP 75** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Révisions de MPSI

6 **EDL$_1$** Résoudre en précisant les éventuelles solutions définies sur $\mathbb{R}$

1. $(1+x^2)y' + xy = 2x^2 + 1$
2. $y' + y = te^t + \sin t$
3. $y' - \ln(x)y = x^x$
4. $t^2y' + 2ty = \dfrac{1}{1+t^2}$
5. $(\cos t)y' + (\sin t)y = \cos^3 t$
6. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$
7. $ty' - y = \sqrt{|t|}$
8. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
9. $(1+t)^2y'' + (1+t)y' = 2$
10. $(x^2+1)y' + xy = 1$
11. $(t^2+1)^2y' + 2t(t^2+1)y = 1$
12. $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = \operatorname{sh}^3(x)$

7 **EDL$_2$** Donner les solutions réelles ou complexes de

1. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 8\sin t \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$
2. $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
3. $y'' + y = \sin^2(t)$
4. $y'' + 4y' + 5y = \operatorname{ch}(2x)\cos x$
5. $y'' + 2y' + 2y = 2t - \sin t$

8 Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2f(-x) + x$.
(On pourra remarquer qu'alors f est deux fois dérivable...)

9 En utilisant la décomposition en parties paire/impaire, déterminer les applications f deux fois dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Sujets d'écrits

10 **CCP 2016** On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.
Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

11 **CCP 2011** On considère l'équation différentielle (E) : $2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

12 **CCP 2009** On considère l'équation différentielle :

$$xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}. \quad (E)$$

1. Résoudre (E) sur chacun eds intervalles $]-1, 0[$ et $]0, 1[$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution sur $]-1, 1[$.

13 **CCP 2005** Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(E_n) \quad xy' - ny = 0.$$

1. Donner l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I =]-\infty, 0[$ et $J =]0, +\infty[$.
2. Dans le cas où $n = 1$, déterminer uniquement par des considérations graphiques, l'espace vectoriel des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
3. Dans le cas où $n \geqslant 2$, déterminer avec soin l'espace vectoriel des solutions de (E_n) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

14 **CCP 2013** On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + 3y \end{cases}.$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
   En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t} e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t, donner l'expression de la matrice e^{tA}.
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$.

15 **CCP 2014** a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(E): \quad x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, \mathrm{i}[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Donner la dimension des espaces S^+ et S^-.
2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J.
   Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leqslant 4$.
3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où
   $$(E): \quad x^2 y'' + xy' = 0.$$
   Determiner S^+ et S^-.
   Determiner ensuite S et donner sans détails la dimension de S .
4. Dans cette question $(E): \quad x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$.
   Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).
   En déduire S^+ puis S^-.
   Determiner S et donner la dimension de S.
5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E): \quad x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).
   On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

16 **Mines 2011**

1. On pose $\mathrm{j} = \exp(2\mathrm{i}\pi/3)$.Que vaut $\mathrm{j}^4 + \mathrm{j}^2 + 1$?
   On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{C}$ et on considère la matrice A de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ suivante :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.
3. En déduire les solutions $X : I \to \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ de l'équation différentielle
   $$X' = AX$$
4. Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle
   $$y^{(4)} + y'' + y = 0$$
   et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   On pourra considérer le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$.

17 **Centrale 2008** λ désigne un réel fixé, q une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, 2π-périodique paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. et on considère l'équation différentielle d'inconnue y : $(E_\lambda) \quad y'' + (\lambda - q) y = 0$.

1. Énoncer précisément le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à l'équation (E_λ) et exploiter l'unicité pour prouver q'une solution y de (E_λ) est impaire si et seulement si $y(0) = 0$.
2. Prouver, par exemple à l'aide du wronskien, que (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité.
3. En déduire la dimension d'un sous-espace propre de $Q : y \in E_2 \to -y'' + qy$ où E_2 est l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Autres exercices

18 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - y + \cos t \\ y' = x + y + 2\sin t \end{cases}$ en posant $u = y - x$.

19 Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = -y + \mathrm{e}^{-t} \\ y' = x + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

20 On considère $(H) : X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre H et en déduire $\exp(tA)$.
2. Retrouver $\exp(tA)$ par un calcul direct.

21 On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = 2tx - y + t\cos t \\ y' = x + 2ty + t\sin t \end{cases}$

1. Résoudre le système homogène en posant $u(t) = x(t)\mathrm{e}^{-t^2}$ et $v(t) = y(t)\mathrm{e}^{-t^2}$.
2. Résoudre le système.
3. Retrouver les solutions en posant $z = x + \mathrm{i}y$.

22 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer de deux façons $\exp(\pi A)$.

23 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det\left(\mathrm{e}^A\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\, A}$. Que dire de $\mathrm{Sp}\left(\mathrm{e}^A\right)$?

24 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des polynômes en A.

1. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire $\mathrm{e}^A \in \mathbb{R}[A]$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer e^A et déterminer un polynôme P tel que $\mathrm{e}^A = P(A)$.

25 Résoudre l'équation $y'' + y = \tan^2 t$.

26 Résoudre l'équation $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$.

27 Résoudre l'équation $(1+x^2)y'' + xy' - 4y = -3x$ en commençant par chercher des solutions polynomiales.

28 Résoudre l'équation $4xy'' + 2y' - y = 0$ en déterminant les solutions développable en série entière.

29 Résoudre l'équation $x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = \mathrm{e}^x$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z(x) = x^2y(x)$.

30 Résoudre l'équation $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en effectuant le changement variable $t = \sqrt{x}$.