Variables aléatoires

Exercices vus en cours

1 **CCINP 109** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Solution de 1 : CCINP 109

1. $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, on note B_i la $i^{\text{ème}}$ boule blanche.
$\forall i \in [\![1,2]\!]$, on note N_i la $i^{\text{ème}}$ boule noire.
On pose $E = \{B_1, B_2, ..., B_n, N_1, N_2\}$.
Alors Ω est l'ensemble des permutations de E et donc $\operatorname{card}(\Omega) = (n+2)!$.

$(X=1)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est blanche.
On a donc n possibilités pour le choix de la première boule blanche et donc $(n+1)!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X=1) = \dfrac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{n}{n+2}$.
$(X=2)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule tirée est noire et la seconde est blanche.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis n possibilités pour la seconde boule et enfin $n!$ possibilités pour les tirages restants.
Donc $P(X=2) = \dfrac{2 \times n \times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$.
$(X=3)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules pour lesquels la première boule et la seconde boule sont noires.
On a donc 2 possibilités pour la première boule, puis une seule possibilité pour la seconde et enfin $n!$ possibilités pour les boules restantes.
Donc $P(X=3) = \dfrac{2 \times 1 \times (n)!}{(n+2)!} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.
Autre méthode :

Dans cette méthode, on ne s'interesse qu'aux "premières" boules tirées, les autres étant sans importance.

$X(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
$(X=1)$ est l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage".
Donc $P(X=1) = \dfrac{\text{nombre de boules blanches}}{\text{nombre de boules de l'urne}} = \dfrac{n}{n+2}$.
$(X=2)$ est l'événement : " obtenir une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au second tirage".

D'où $P(X=2) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.
$(X=3)$ est l'événement : "obtenir une boule noire lors de chacun des deux premiers tirages puis une boule blanche au troisième tirage".
D'où $P(X=3) = \dfrac{2}{n+2} \times \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n}{n} = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$, les tirages se faisant sans remise.

2. $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.
L'événement $(Y=k)$ correspond aux tirages des $(n+2)$ boules où les $(k-1)$ premières boules tirées ne sont ni B_1 ni N_1 et la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est B_1 ou N_1.
On a donc, pour les $(k-1)$ premières boules tirées , $\dbinom{n}{k-1}$ choix possibles de ces boules et $(k-1)!$ possibilités pour leur rang de tirage sur les $(k-1)$ premiers tirages, puis 2 possibilités pour le choix de la $k^{\text{ième}}$ boule et enfin $(n+2-k)!$ possibilités pour les rangs de tirage des boules restantes.
Donc $P(Y=k) = \dfrac{\dbinom{n}{k-1} \times (k-1)! \times 2 \times (n+2-k)!}{(n+2)!} = \dfrac{2\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times (n+2-k)!}{(n+2)!}$
Donc $P(Y=k) = \dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$.
Autre méthode :

$Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
On note A_k l'événement " une boule ne portant pas le numéro 1 est tirée au rang k".

Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

On a : $(Y=k) = A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$.
Alors, d'après la formule des probabilités composées,
$P(Y=k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1\cap A_2 \cap ... \cap A_{k-2}}(A_{k-1})P_{A_1\cap A_2\cap...\cap A_{k-1}}(\overline{A_k})$.
$P(Y=k) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n-1}{(n+2)-1} \times \dfrac{n-2}{(n+2)-2} \times ... \times \dfrac{n-(k-2)}{(n+2)-(k-2)} \times \dfrac{2}{(n+2)-(k-1)}$
$P(Y=k) = \dfrac{n}{n+2} \times \dfrac{n-1}{n+1} \times \dfrac{n-2}{n} \times ... \times \dfrac{n-k+2}{n-k+4} \times \dfrac{2}{n-k+3}$.
$P(Y=k) = 2\dfrac{n!}{(n-k+1)!} \times \dfrac{(n-k+2)!}{(n+2)!}$.
$P(Y=k) = \dfrac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}$.

2 **CCINP 104** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X=2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Solution de 2 : CCINP 104

1. $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
2. (a) Pour que l'événement $(X=2)$ se réalise, on a $\dbinom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des n boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.
Donc $P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=3\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

(b) Déterminons $P(X=1)$.
Pour que l'événement $(X=1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide.
Le compartiment restant vide étant choisi, on note A l'événement : «les n boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment a et compartiment b) sans laisser l'un d'eux vide».
Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$.

On note A_k l'événement : « k boules se placent dans le compartiment a et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment b».

On a alors $A=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}A_k$.

On a $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $P(A_k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Donc $P(X=1)=\binom{3}{1}P(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}A_k)=3\sum\limits_{k=1}^{n-1}P(A_k)$ car $A_1,A_2,...,A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.

Donc $P(X=1)=3\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

Donc $P(X=1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

Enfin, $P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$ donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

Donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-1)$.

Autre méthode :
Une épreuve peut être assimilée à une application de $[\![1,n]\!]$ (ensemble des numéros des boules) dans $[\![1,3]\!]$ (ensemble des numéros des cases).
Notons Ω l'ensemble de ces applications.
On a donc : $\operatorname{card}\Omega=3^n$.
Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur Ω.
(a) L'événement $(X=2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $[\![1,3]\!]$, c'est-à-dire aux applications constantes.
Donc $P(X=2)=\frac{3}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}$.
(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X=1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.
On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $[\![1,3]\!]$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ vers les deux éléments restants de $[\![1,3]\!]$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.
On obtient donc 2^n-2 applications.
D'où $P(X=1)=\frac{3\times(2^n-2)}{3^n}=\frac{1}{3^{n-1}}(2^n-2)$.
Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$ donc $P(X=0)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)$.

3. (a) $E(X)=0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(2^n-2)+2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
Donc $E(X)=3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(b) D'après 3.(a), $\lim\limits_{n\to+\infty}E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty}3\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.
Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

3 On lance deux dés équilibrés, et on appelle X est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit.
Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X,Y).

Solution de 3 :

X \ Y	1	2	3	4	5	6	loi de X
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	1/18	1/36	0	0	0	0	1/12
3	1/18	1/18	1/36	0	0	0	5/36
4	1/18	1/18	1/18	1/36	0	0	7/36
5	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	0	9/36
6	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	11/36
loi de Y	11/36	9/12	7/36	5/36	3/36	1/36	(1)

4 Soient X_1,X_2 variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$ et $X_3=X_1\times X_2$.
Montrer que X_1,X_2,X_3 sont deux à deux indépendantes, mais ne le sont pas mutuellement.

Solution de 4 :

$$\mathbb{P}(X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)+\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{2}$$

Donc $X_3\hookrightarrow\mathcal{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$.
Alors X_1,X_2,X_3 sont indépendantes deux à deux car $X_1\perp\!\!\!\perp X_2$,

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=-1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=-1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=-1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_3=-1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=-1,X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=-1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

Donc $X_1\perp\!\!\!\perp X_3$ et par symétrie, $X_2\perp\!\!\!\perp X_3$.
Pourtant, elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}.$$

5 **CCINP 98** Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p\in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k\in\mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Solution de 5 : CCINP 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes.
De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres (n,p).
C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$P(Y=k|X=i)=\begin{cases}\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k} \text{ si } k\in[\![0,n-i]\!]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

(b) $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]$ $P(Z=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(Y=k-i|X=i)P(X=i)$.

Soit $k\in[\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}p^k(1-p)^{2n-k-i}$.

Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Donc $P(Z=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.

Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k=\binom{n}{k}\left(p(2-p)\right)^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

On vérifie que $1-p(2-p)=(1-p)^2$ et donc on peut conclure que :
Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$.

Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :

$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!}\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{n!}{(k-i)!(n-k)!i!}=\frac{k!}{(k-i)!i!}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

(c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$, alors, $E(Z)=np(2-p)$ et $V(Z)=np(2-p)\left(1-p(2-p)\right)=np(2-p)(p-1)^2$.

6

Si $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$, montrer que $Y=n-X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,q)$.

7

CCINP 95 Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Solution de 7 : CCINP 95

1. (a) L'expérience est la suivante : l'épreuve "le tirage d'une boule dans l'urne" est répétée 5 fois.
Comme les tirages se font avec remise, ces 5 épreuves sont indépendantes.
Chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le joueur tire une boule blanche (succès avec la probabilité $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$) ou le joueur tire une boule noire (échec avec la probabilité $\frac{4}{5}$).
La variable X considérée représente donc le nombre de succès au cours de l'expérience et suit donc une loi binomiale de paramètre $(5,\frac{1}{5})$.
C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0,5]\!]$ et : $\forall k\in[\![0,5]\!]$, $P(X=k)=\binom{5}{k}(\frac{1}{5})^k(\frac{4}{5})^{5-k}$.
Donc, d'après le cours, $E(X)=5\times\frac{1}{5}=1$ et $V(X)=5\times\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}=0{,}8$.

(b) D'après les hypothèses, on a $Y=2X-3(5-X)$, c'est-à-dire $Y=5X-15$.
On en déduit que $Y(\Omega)=\left\{5k-15 \text{ avec } k\in[\![0,5]\!]\right\}$.
Et on a $\forall k\in[\![0,5]\!]$, $P(Y=5k-15)=P(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$.
$Y=5X-15$, donc $E(Y)=5E(X)-15=5-15=-10$.
De même, $Y=5X-15$, donc $V(Y)=25V(X)=25\times\frac{4}{5}=20$.

2. Dans cette question, le joueur tire successivement, sans remise, 5 boules dans cette urne.
(a) Comme les tirages se font sans remise, on peut supposer que le joueur tire les 5 boules dans l'urne en une seule fois au lieu de les tirer successivement. Cette supposition ne change pas la loi de X.
$X(\Omega)=[\![0,2]\!]$.
Notons A l'ensemble dont les éléments sont les 10 boules initialement dans l'urne.
Ω est constitué de toutes les parties à 5 éléments de A. Donc card$\Omega=\binom{10}{5}$.

Soit $k\in[\![0,2]\!]$.
L'événement $(X=k)$ est réalisé lorsque le joueur tire k boules blanches et $(5-k)$ boules noires dans l'urne.
Il a donc $\binom{2}{k}$ possibilités pour le choix des boules blanches et $\binom{8}{5-k}$ possibilités pour le choix des boules noires.
Donc : $\forall k\in[\![0,2]\!]$, $P(X=k)=\dfrac{\binom{2}{k}\times\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

(b) On a toujours $Y=5X-15$.
On en déduit que $Y(\Omega)=\left\{5k-15 \text{ avec } k\in[\![0,2]\!]\right\}$.
Et on a $\forall k\in[\![0,2]\!]$, $P(Y=5k-15)=P(X=k)=\dfrac{\binom{2}{k}\times\binom{8}{5-k}}{\binom{10}{5}}$.

8

CCINP 102 Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Soit $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.

On considère N variables aléatoires $X_1,X_2,\cdots,X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i\in[\![1,N]\!]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i\leqslant n)$, puis $P(X_i>n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall\omega\in\Omega$, $Y(\omega)=\min(X_1(\omega),\cdots,X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y>n)$.
   En déduire $P(Y\leqslant n)$, puis $P(Y=n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Solution de 8 : CCINP 102

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$.
$X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$.
Alors on a $P(X_i \leqslant n) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$.
Donc $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leqslant n) = q^n$.
2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \cdots \cap (X_N > n))$
Donc $P(Y > n) = \prod\limits_{i=1}^{N} P(X_i > n)$ car les variables $X_1, \cdots, X_N$ sont mutuellement indépendantes.
Donc $P(Y > n) = \prod\limits_{i=1}^{N} q^n = q^{nN}$.
Or $P(Y \leqslant n) = 1 - P(Y > n)$
donc $P(Y \leqslant n) = 1 - q^{nN}$.
Calcul de $P(Y = n)$:
Premier cas : si $n \geqslant 2$.
$P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n-1)$.
Donc $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
Deuxième cas : si $n = 1$.
$P(Y = n) = P(Y = 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - q^N$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
(b) D'après 2.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \left(1 - (1 - q^N)\right)^{n-1}(1 - q^N)$.
On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^N$.
Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y) = \dfrac{1}{1-q^N}$.

9 **CCINP 106** X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Solution de 9 : CCINP 106

1. $(U, V)(\Omega) = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geqslant n\}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geqslant n$.
Premier cas : si $m = n$
$P((U = m) \cap (V = n)) = P((X = n) \cap (Y = n)) = P(X = n)P(Y = n)$ car X et Y sont indépendantes.
Donc $P((U = m) \cap (V = n)) = p^2 q^{2n}$.
Deuxième cas : si $m > n$
$P((U = m) \cap (V = n)) = P([(X = m) \cap (Y = n)] \cup [(X = n) \cap (Y = m)])$
Les événements $((X = m) \cap (Y = n))$ et $((X = n) \cap (Y = m))$ sont incompatibles donc :
$P((U = m) \cap (V = n)) = P((X = m) \cap (Y = n)) + P((X = n) \cap (Y = m))$.
Or les variables X et Y suivent la même loi et sont indépendantes donc :
$P((U = m) \cap (V = n)) = 2P(X = m)P(Y = n) = 2p^2 q^{n+m}$.
Bilan : $P((U = m) \cap (V = n)) = \begin{cases} p^2 q^{2n} & \text{si } m = n \\ 2p^2 q^{n+m} & \text{si } m > n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et $V(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}$.
$P(U = m) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P((U = m) \cap (V = n))$. (loi marginale de (U, V))
Donc d'après 1., $P(U = m) = \sum\limits_{n=0}^{m} P((U = m) \cap (V = n)) \quad (*)$
Premier cas : $m \geqslant 1$
D'après $(*)$, $P(U = m) = P((U = m) \cap (V = m)) + \sum\limits_{n=0}^{m-1} P((U = m) \cap (V = n))$.
Donc $P(U = m) = p^2 q^{2m} + \sum\limits_{n=0}^{m-1} 2p^2 q^{n+m} = p^2 q^{2m} + 2p^2 q^m \sum\limits_{n=0}^{m-1} q^n = p^2 q^{2m} + 2p^2 q^m \dfrac{1-q^m}{1-q} = p^2 q^{2m} + 2pq^m(1 - q^m)$
Donc $P(U = m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.
Deuxième cas : $m = 0$
D'après $(*)$ et 1., $P(U = 0) = P((U = 0) \cap (V = 0)) = p^2$.
Bilan : $\forall m \in \mathbb{N}$, $P(U = m) = pq^m(pq^m + 2 - 2q^m)$.
3. $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(W = n) = P(V = n - 1) = pq^{2(n-1)}(1 + q) = (1 - q)q^{2(n-1)}(1 + q)$.
Donc $P(W = n) = (1 - q^2)\left(q^2\right)^{n-1}$.
Donc W suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
Donc, d'après le cours, $E(W) = \dfrac{1}{1-q^2}$. Donc $E(V) = E(W - 1) = E(W) - 1 = \dfrac{q^2}{1-q^2}$.
4. $P((U = 0) \cap (V = 1)) = 0$ et $P(U = 0)P(V = 1) = p^3 q^2(1 + q) \neq 0$. Donc U et V ne sont pas indépendantes.

10 **CCINP 111** On admet, dans cet exercice, que $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0, 1[$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
(b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
(c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

Solution de 10 : CCINP 111

1. On remarque que $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$, $P((X = k) \cap (Y = n)) \geqslant 0$.
$(X, Y)(\Omega) = \{(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leqslant n\}$.
Posons $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$, $p_{k,n} = P((X = k) \cap (Y = n))$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant 0} p_{k,n}$ converge (car un nombre fini de termes non nuls).
Et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n 2^n = p(1-p)^n$.
De plus, $\sum\limits_{n \geqslant 0} p(1-p)^n = p \sum\limits_{n \geqslant 0} (1-p)^n$ converge (série géométrique convergente car $(1-p) \in]0, 1[$).
Et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n = p \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n = p\dfrac{1}{1-(1-p)} = 1$.
Donc on définit bien une loi de probabilité.

2. (a) $Y(\Omega)=\mathbb{N}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$.
$P(Y=n)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P((X=k)\cap(Y=n))$ (loi marginale)
Donc, d'après les calculs précédents, $P(Y=n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=p(1-p)^n$.
C'est-à-dire, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(Y=n)=p(1-p)^n$.
(b) Posons $Z=1+Y$.
$Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P(Z=n)=P(Y=n-1)=p(1-p)^{n-1}$.
Donc Z suit une loi géométrique de paramètre p.
(c) D'après la question précédente, $E(Z)=\dfrac{1}{p}$.
Or $Y=Z-1$ donc $E(Y)=E(Z)-1$ et donc $E(Y)=\dfrac{1-p}{p}$.

3. $X(\Omega)=\mathbb{N}$.
Soit $k\in\mathbb{N}$. $P(X=k)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P((X=k)\cap(Y=n))$ (loi marginale)
Donc $P(X=k)=\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=p\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}(1-p)\right)^{n-k}$.
Donc, d'après les résultats admis dans l'exercice, $P(X=k)=p\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}(1-p)\right)^{k+1}}$
C'est-à-dire $P(X=k)=p\left(\frac{1}{2}\right)^k(1-p)^k\dfrac{2^{k+1}}{(1+p)^{k+1}}$.
Donc, $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=\dfrac{2p}{1+p}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^k$.

11 CCINP 103

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in(]0,+\infty[)^2$.
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de X_1+X_2.
(b) En déduire l'espérance et la variance de X_1+X_2.
2. Soit $p\in]0,1]$. Soit $\lambda\in]0,+\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et que, pour tout $m\in\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre (m,p).
Déterminer la loi de X.

Solution de 11 : CCINP 103

1. (a) $X_1(\Omega)=\mathbb{N}$ et $X_2(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $(X_1+X_2)(\Omega)=\mathbb{N}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. $(X_1+X_2=n)=\bigcup\limits_{k=0}^{n}((X_1=k)\cap(X_2=n-k))$ (union d'évènements deux à deux disjoints).

Donc

$$\begin{aligned}P(X_1+X_2=n)&=\sum_{k=0}^{n}P((X_1=k)\cap(X_2=n-k))\\&=\sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)P(X_2=n-k)\text{ car }X_1\text{ et }X_2\text{ sont indépendantes.}\\&=\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\times e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}\\&=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\end{aligned}$$

Ainsi $X_1+X_2\rightsquigarrow\mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.
Remarque : cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.

(b) $X_1+X_2\rightsquigarrow\mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)$ donc, d'après le cours, $E(X_1+X_2)=\lambda_1+\lambda_2$ et $V(X_1+X_2)=\lambda_1+\lambda_2$.

2. Soit $k\in\mathbb{N}$, $P(X=k)=\sum\limits_{m=0}^{+\infty}P((X=k)\cap(Y=m))=\sum\limits_{m=0}^{+\infty}P_{(Y=m)}(X=k)P(Y=m)$.
Or, par hypothèse,

$$\forall m\in\mathbb{N},\ P_{(Y=m)}(X=k)=\begin{cases}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k} & \text{si } k\leqslant m\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}P(X=k)&=\sum_{m=k}^{+\infty}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\lambda^k\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\end{aligned}$$

Ainsi $X\rightsquigarrow\mathscr{P}(\lambda p)$.

12 CCINP 108

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par :
$\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j))=\dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
(b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Solution de 12 : CCINP 108

1. $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j))=\dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$.
$X(\Omega)=\mathbb{N}$.
Soit $i\in\mathbb{N}$.
$\sum\limits_{j\geqslant0}\dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}=\dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}}\sum\limits_{j\geqslant0}\dfrac{1}{j!}$ converge et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}=\dfrac{1}{2^{i+1}}$.
Or $P(X=i)=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}P((X=i)\cap(Y=j))$ donc $P(X=i)=\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}j!}=\dfrac{1}{\mathrm{e}2^{i+1}}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!}=\dfrac{1}{2^{i+1}}$.

Conclusion : $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$.
$Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$.
$\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e} j!} \sum_{i\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{2}$) et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e} j!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e} j!}$.

Or $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P((X=i)\cap(Y=j))$.

Donc $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{i+1} j!} = \frac{1}{2\mathrm{e} j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2\mathrm{e} j!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e} j!}$.

Conclusion : $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(Y=j) = \dfrac{1}{\mathrm{e} j!}$.

2. (a) On pose $Z = X+1$.
$Z(\Omega) = N^*$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Z=n) = P(X=n-1) = \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
Donc Z suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.
Donc, d'après le cours, $E(Z) = \dfrac{1}{p} = 2$ et $V(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = 2$.
Donc $E(X) = E(Z-1) = E(Z)-1 = 2-1 = 1$ et $V(X) = V(Z-1) = V(Z) = 2$.
C'est-à-dire $E(X) = 1$ et $V(X) = 2$.

(b) Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
Donc, d'après le cours, $E(Y) = V(Y) = \lambda = 1$.

3. On a : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = P(X=i)P(Y=j)$. Donc les variables X et Y sont indépendantes.

4. $(X=Y) = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ((X=k)\cap(Y=k))$ et il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles donc :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}2^{k+1}} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = \frac{1}{2\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

Donc $P(X=Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$.

13 CCINP 96

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t=1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

Solution de 13 : CCINP 96

1. $X(\Omega) = [\![r,+\infty[\![$.
Soit $n \in [\![r,+\infty[\![$.
$(X=n)$ signifie que n tirs de laser ont été nécessaires pour tuer la bactérie.

C'est-à-dire que, sur les $n-1$ premiers tirs de laser, la bactérie est touchée $(r-1)$ fois, non touchée $((n-1)-(r-1))$ fois et enfin touchée au $n^{\text{ième}}$ tir.
Sur les $(n-1)$ premiers tirs, on a $\binom{n-1}{r-1}$ choix possibles pour les tirs de laser qui atteignent la bactérie.
On en déduit alors que : $P(X=n) = \dbinom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{(n-1)-(r-1)} \times p$.

C'est-à-dire : $\forall n \in [\![r,+\infty[\![$, $P(X=n) = \dbinom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$.

2. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant r} nP(X=n)$.
Soit $n \in [\![r,+\infty[\![$.
$nP(X=n) = n\dbinom{n-1}{r-1} p^r(1-p)^{n-r} = n\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} p^r(1-p)^{n-r} = r\dfrac{n!}{(n-r)!r!} p^r(1-p)^{n-r}$.
C'est-à-dire : $nP(X=n) = r\dbinom{n}{r} p^r(1-p)^{n-r}$.
Donc : $\displaystyle\sum_{n\geqslant r} nP(X=n) = rp^r \sum_{n\geqslant r} \binom{n}{r}(1-p)^{n-r}$.
Or, par hypothèse, $p \in]0,1[$ donc $(1-p) \in]0,1[$.
On en déduit, d'après le résultat admis dans l'exercice, que $\displaystyle\sum_{n\geqslant r} nP(X=n)$ converge et donc $E(X)$ existe.
De plus, $E(X) = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} nP(X=n) = rp^r \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}(1-p)^{n-r} = r\frac{p^r}{\left(1-(1-p)\right)^{r+1}}$.
C'est-à-dire $E(X) = \dfrac{r}{p}$.

14 CCINP 97

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\big((X,Y)=(j,k)\big) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Solution de 14 : CCINP 97

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
$P(Y=k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P\big((X,Y)=(j,k)\big) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.
Or, $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j\geqslant 1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}$ donc $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} \quad (*). \qquad (\star)$$

De même, $\sum_{j\geqslant 0} \dfrac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \dfrac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j\geqslant 0} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0} \dfrac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} \quad (**). \qquad (\star\star)$$

Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que :
$P(Y=k) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} + \dfrac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} = \dfrac{(\frac{1}{2}+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}$.
Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc :
$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(X=j) = \dfrac{(\frac{1}{2}+j)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car :
$P((X,Y)=(0,0)) = 0$ et $P(X=0)P(Y=0) \neq 0$.

2. Posons $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$, $a_{j,k} = 2^{j+k} P\big((X,Y)=(j,k)\big)$.
On a $a_{j,k} = \dfrac{j+k}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \dfrac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!} + \dfrac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$.
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j\geqslant 0} \dfrac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \dfrac{1}{\mathrm{e} k!} \sum_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{(j-1)!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty} \dfrac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \dfrac{1}{\mathrm{e} k!} \sum_{j=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(j-1)!} = \dfrac{1}{k!}$.
De même, $\sum_{j\geqslant 0} \dfrac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \dfrac{k}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j\geqslant 0} \dfrac{1}{j!}$ converge et $\sum_{j=0}^{+\infty} \dfrac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \dfrac{k}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{j!} = \dfrac{k}{k!}$.
Ensuite, $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{k!}$ et $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{k}{k!} = \sum_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{(k-1)!}$ convergent. De plus $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = \mathrm{e}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k}{k!} = \mathrm{e}$.
Donc la famille $(a_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
On en déduit que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et $E\left[2^{X+Y}\right] = 2\mathrm{e}$.

15 CCINP 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Solution de 15 : CCINP 99

1. Soit $a \in]0,+\infty[$. Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a :
   $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.
   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.
   De plus, comme les variables sont mutuellement indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2} V(S_n) = \dfrac{1}{n} V(Y_1)$.
   Alors, en appliquant 1. à X, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
   Les variables Y_i suivent la même loi, sont mutuellement indépendantes et admettent des moments d'ordre 2.
   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1-0,4) = 0,24$.
   On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   Alors $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.
   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.
   Or $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) = P\left(0,35 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$
   $= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   On a donc $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.
   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Donc $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) \geqslant 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.
   Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.
   La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

16 CCINP 100

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.

3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Solution de 16 : CCINP 100

1. On obtient $R(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)}$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$P(X \leqslant N) = \lambda \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right) = \lambda \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \right)$
Et donc, après télescopage, $P(X \leqslant N) = \lambda \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N+1} + \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{2(N+2)} \right)$ c'est-à-dire :
$P(X \leqslant N) = \lambda \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(N+1)} + \dfrac{1}{2(N+2)} \right)$. (*)
Or $\lim\limits_{N \to +\infty} P(X \leqslant N) = 1$.
Donc d'après (*), $\lambda = 4$.
3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} nP(X = n) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{4}{(n+1)(n+2)}$ converge car au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n^2}$.
Donc X admet une espérance.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = 4 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 4 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} \right) = 2 - \frac{4}{n+2}$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = 2$ et $E(X) = 2$.
4. Comme $E(X)$ existe, X admettra une variance à condition que X^2 admette une espérance.
$\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^2 P(X = n) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{4n}{(n+1)(n+2)}$.
Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4n}{(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).
Donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^2 P(X = n)$ diverge.
Donc X^2 n'admet pas d'espérance et donc X n'admet pas de variance.

17 CCINP 110

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
On note R_X son rayon de convergence.
   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.
   Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Solution de 17 : CCINP 110

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [-1, 1]$, $|t^n P(X = n)| \leqslant P(X = n)$ et $\sum P(X = n)$ converge ($\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$).
   Donc $\forall t \in [-1, 1]$, $\sum t^n P(X = n)$ converge absolument.
   On en déduit $R_X \geqslant 1$ et aussi $[-1, 1] \subset D_{G_X}$. Au surplus, pour tout t dans $[-1, 1]$, le théorème du transfert assure que la variable aléatoire t^X admet une espérance et $E(t^X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n) = G_X(t)$. G_X est la fonction génératrice de X.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
   G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R_X \geqslant 1$.
   Donc, d'après le cours, G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[\subset]-R_X, R_X[$.
   De plus, $\forall t \in]-1, 1[$, $G_X^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} P(X = n)$.
   En particulier, $G_X^{(k)}(0) = k! P(X = k)$ et donc $P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum t^n P(X = n) = \sum t^n \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et donc $D_{G_X} = \mathbb{R}$.
   De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.
   (b) On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   $D_{G_X} = D_{G_Y} = \mathbb{R}$ et, si on pose $Z = X + Y$, alors $[-1, 1] \subset D_{G_Z}$.
   Alors, $\forall t \in [-1, 1]$, $G_Z(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X) E(t^Y)$ car X et Y sont indépendantes et donc, d'après le cours, t^X et t^Y sont indépendantes.
   Donc, d'après 2.(a), $G_Z(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1(t-1)} \mathrm{e}^{\lambda_2(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1 + \lambda_2)(t-1)}$.
   On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
   Donc, d'après 1.(b), comme Z a la même fonction génératrice qu'une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$, alors $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Autres exercices

18 Soit X, Y, Z, T quatre variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y, Z, T suivent toutes une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
   (b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
   (c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. (a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
   (b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
   (c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.

Solution de 18 :

1. (a) $\mathbb{E}(\det(M)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(XT - YZ)\right) = \frac{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)}{2} = 0$ par linéarité et indépendance.
   (b) On vérifie que $\det(M)(\Omega) = \{0, -1, 1\}$ et la définition de l'espérance (nulle) donne alors le résultat.
   Ou alors on vérifie que $\mathbb{P}(\det M = 1) = \mathbb{P}(XT = 1, ZY = -1)$ et $\mathbb{P}(\det M = 1) = \mathbb{P}(XT = -1, ZY = 1)$ et les probabilités sont égales pour des raisons de symétrie.
   Ou alors on voit que $-\det(M)$ est la variable aléatoire obtenue en changeant X en $-X$ et Z en $-Z$ ce qui ne change pas la loi car $-X, Y, -Z, T$ sont indépendantes et de même loi uniforme que X, Y, Z, T.
   (c) Vu la première question, $\mathbb{V}(\det(M)) = \mathbb{E}\left(\det(M)^2\right) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}(XYZT)) = \frac{1}{2}(1 - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(T)) = \frac{1}{2}$ par indépendance.
2. (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M \in \mathcal{O}(2)) &= \mathbb{P}\left(X^2 + Z^2 = Y^2 + T^2 = 1, XY + ZT = 0\right) = \mathbb{P}(XY + ZT = 0) \\ &= \mathbb{P}(XY = 1, ZT = -1) + \mathbb{P}(XY = -1, ZT = 1) \\ &= 2\mathbb{P}(XY = 1, ZT = -1) && \text{par symétrie} \\ &= 2\mathbb{P}(XY = 1)\mathbb{P}(ZT = -1) && \text{par lemme des coalition} \end{aligned}$$

   avec $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(ZT = -1) = \frac{1}{2}$ par symétrie.
   Finalement, $\mathbb{P}(M \in \mathcal{O}(2)) = \frac{1}{2}$.
   (b) $\mathbb{P}(M \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\det M = 1) + \mathbb{P}(\det M = -1) = 2\mathbb{P}(\det M = 1) = 2\mathbb{P}(XT = -1, ZY = 1) = \frac{1}{2}$ par symétrie vu le calcul précédent.
   (c) $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(M)\lambda + \det M$.
   1^er^ cas $XT = 1$ et $YZ = 1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda$ scindé simple donc M est diagonalisable.
   2^e^ cas $XT = 1$ et $YZ = -1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda + 1$ à discriminant < 0 : M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.
   3^e^ cas $XT = -1$ et $YZ = 1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - 1$ scindé simple donc M est diagonalisable.
   4^e^ cas $XT = -1$ et $YZ = -1$: $\chi_M(\lambda) = \lambda^2$ donc M n'est pas diagonalisable car non nulle.
   Finalement, la probabilité que M soit diagonalisable est $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et $\frac{3}{4}$ dans $\mathbb{C}$.
   Autre raisonnement possible :
   - Si $Y = Z$, la matrice symétrique réelle est diagonalisable cela arrive à probabilité $P(YZ = 1) = 1/2$.
   - Sinon, $(YZ = -1)$ et le polynôme caractéristique de $\sqrt{2}M$ est $\lambda^2 - (X + T)\lambda + (XT + 1)$ et on sépare le cas $XT = 1$ (diagonalisable seulement dans $\mathbb{C}$) ou $XT = -1$ (non diagonalisable) ...

   D'où la probabilité d'être diagonalisable dans $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2}$, et la probabilité de l'être dans $\mathbb{C}$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

19 **Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock**

Le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente étant supposé suivre une loi de Poisson[1] de paramètre λ.

Un client achète un article A avec probabilité p (il en achète au plus un).

Le **stock** d'articles A à l'ouverture du magasin est de $s \geqslant 1$ articles.

On veut calculer la loi du nombre total T d'articles demandés en une journée et la probabilité qu'il n'y ait pas **rupture de stock** de l'article A durant cette journée.

On modélise la situation de la manière suivante : on se donne une variable aléatoire N, représentant le nombre de clients entrant dans le magasin durant la journée, et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, représentant la décision d'achat du n^e client : $X_n = 1$ s'il achète, $X_n = 0$ sinon. On suppose toutes ces variables aléatoires **indépendantes**.

On suppose que la loi de N est la **loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p.

Le nombre total d'articles demandés en une journée est la variable aléatoire T définie par $T = \mathbb{1}_{(N \geqslant 1)} \sum_{j=1}^{N} X_j$.

On demande la loi de T et la probabilité $\mathbb{P}(T \leqslant s)$.

Solution de 19 : Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock

$(T = 0) = (N = 0) \sqcup \bigsqcup_{n \geqslant 1} \left(N = n, \sum_{j=1}^{n} X_j = 0\right)$ donne $\mathbb{P}(T = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda p}$.

Puis $(T = k) = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \left(N = n, \sum_{j=1}^{n} X_j = k\right)$ donne $\mathbb{P}(T = k) = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$ car $\sum_{j=1}^{n} X_j$ suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

$\mathbb{P}(T \leqslant s) = \mathrm{e}^{-\lambda p} \sum_{k=0}^{s} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$.

20 **...suite** Le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente étant supposé suivre une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Les probabilités respectives pour chaque client d'acheté zéro, un ou deux articles A sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Le nombre d'articles en question achetés pendant une journée est une variable aléatoire S. On étudie la loi de S grâce à son fonction génératrice.

On modélise la situation de la manière suivante : on se donne une variable aléatoire N, représentant le nombre de clients entrant dans le magasin durant la journée, et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, la loi de N est la **loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ et X_n représente le nombre d'achats d'article A du n^e client de loi $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$.

On définit enfin $T = \mathbb{1}_{(N \geqslant 1)} \sum_{j=1}^{N} X_j$.

1. Calculer la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T, en tout $t \in [-1, 1]$.
2. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(T = 3)$ et la calculer numériquement pour $\lambda = 6$.
3. Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$ et donner leur valeur. Les calculer numériquement pour $\lambda = 6$.

Solution de 20 : ...suite

1. $G_T(t) = G_N(G_{X_1}(t)) = \exp(\lambda(-5/6 + t/2 + t^2/3))$ après un Fubini élaboré : sce $(N = n)$, puis Fubini, puis $G_{S_n} = G_{X_1}^n$ après avoir mis $(N = 0)$ à part...

1. Cohérent avec l'approximation des lois binomiales par des lois de Poisson vue en cours.

21 Loi binomiale négative

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire S_2.
2. Montrer que pour $0<n<k$, $\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\binom{k-1}{n}$.

   On pourra par exemple introduire $P(x)=\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}\right)x^n$.
3. Calculer par récurrence la loi de la variable aléatoire S_n.
4. On joue à Pile ou Face ; on note T_k le numéro du k-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T (loi binomiale négative). Combien vaut l'espérance de T ?
   La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurrence d'un événement ; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi binomiale négative », donne le temps d'attente de la k^e occurrence de cet événement.

Solution de 21 : Loi binomiale négative

1. $\mathbb{P}(S_2=k)=\binom{k-1}{1}p^2q^{k-2}$.
2. Intervertir les sommes...
3. $\mathbb{P}(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}$ (nul si $1\leqslant k\leqslant n-1$).
   Récurrence, $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$.
4. On joue à Pile ou Face ; on note T_k le numéro du k-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T (loi binomiale négative). Combien vaut l'espérance de T ?
   La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurrence d'un événement ; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi binomiale négative », donne le temps d'attente de la k^e occurrence de cet événement.

22 Embranchement routier

On se place à un embranchement routier. Le nombre de véhicules arrivant pendant un intervalle de temps d'une heure est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Les véhicules ne peuvent prendre que l'une des directions A ou B, et la variable aléatoire Y représente le nombre de véhicules empruntant la direction A pendant cet intervalle de temps.

Chaque véhicule prend la direction A avec la probabilité p et les choix sont faits de manière indépendante.

C'est pourquoi on suppose que si n véhicules arrivent à l'embranchement pendant une heure donnée, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Déterminer la loi de Y ainsi que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la loi de X conditionnelle à l'événement $(Y=k)$ (du nombre de véhicules arrivés à l'embranchement sachant que k véhicules ont emprunté la direction A).

Solution de 22 : Embranchement routier

Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

$\mathbb{P}(X_n|Y=k)=\mathrm{e}^{-\lambda q}\dfrac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$.

23 Un peu de théorie préhilbertienne

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé dénombrable, tel que

$$\forall\omega\in\Omega\quad \mathbb{P}(\{\omega\})\neq 0$$

On notera $\mathscr{L}^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ qui admettent un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathscr{L}^2$ est un espace vectoriel, et que
$$(X|Y)=\mathbb{E}(XY)$$
définit un produit scalaire sur cet espace.
2. Si $X\in\mathscr{L}^2$, déterminer le projeté orthogonal de X sur l'espace des variables aléatoires constantes. Déterminer la distance de X à cet espace.
3. À partir de la question précédente, retrouver la formule
$$\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$$
4. Si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{L}^2$, X non constante, déterminer la projection orthogonale de X sur $\{aY+b\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$. Calculer la distance de X a ce plan.
5. Si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{L}^2$, on définit leur coefficient de corrélation linéaire :
$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$
Montrer que $\rho(X,Y)\in[-1,1]$. Quand ce coefficient est-il égal à ±1 ?
6. Soit X,Y deux éléments de $\mathscr{L}^2$. On note
$$F=\left\{Z\in\mathscr{L}^2\ ;\ \exists(a_x)_{x\in X(\Omega)}\in\mathbb{R}^{X(\Omega)}\quad Z=\sum_{x\in X(\Omega)}a_x\mathbb{1}_{(X=x)}\right\}$$
déterminer, s'il existe, le projeté orthogonal de Y sur F (on suppose, pour tout x, $\mathbb{P}(X=x)\neq0$).

Solution de 23 : Un peu de théorie préhilbertienne

1. L'inégalité
$$|XY|\leqslant\frac12\left(X^2+Y^2\right)$$
fait que le produit de deux éléments de $\mathscr{L}^2$ est d'espérance finie. Et donc, si X et Y sont dans $\mathscr{L}^2$, $X+Y$ y est aussi, en vertu de
$$(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY$$
le membre de droite ne contenant que des termes d'espérance finie. Comme λX y est évidemment, $\mathscr{L}^2$ est bien un espace vectoriel. Et $(X,Y)\mapsto\mathbb{E}(XY)$ est bien défini dessus. Les propriétés d'un produit scalaire sont sans problème, on remarque seulement que si $(X|X)=0$,
$$\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})X^2(\omega)=0$$
ce qui vu l'hypothèse de départ donne $X=0$. *Sans l'hypothèse de départ, on peut toujours construire ce genre de produit scalaire, mais on a seulement $(X|X)=0\Rightarrow X=0$ presque sûrement. Ce qui n'est dans le fond pas gênant, mais oblige à déborder un peu du strict cadre du programme.*

2. L'existence et l'unicité est assurée par le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit a la projection cherchée : on a $X-a\perp 1$, donc
$$\mathbb{E}\left((X-a)\times1\right)=0$$
et cela donne $a=\mathbb{E}(X)$. Pas si étonnant si on y réfléchit. Et notant $F=\mathrm{Vect}(1)$,
$$d(X,F)=\sqrt{\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)}=\sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

3. Soit p la projection orthogonale sur F. On a
$$p(aX+b)=ap(x)+p(b)=ap(X)+b$$
et donc
$$(aX+b)-p(aX+b)=a(X-p(X))$$
Prenant le carré de la norme des deux membres, on obtient bien par la question précédente
$$\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$$

4. Notons $\alpha Y+\beta$ la projection cherchée. Alors $\left(X-\alpha Y-\beta|1\right)=\left(X-\alpha Y-\beta|Y\right)=0$. Ce qui donne le système
$$\begin{cases}\mathbb{E}(Y^2)\alpha & + & \mathbb{E}(Y)\beta & = & \mathbb{E}(XY)\\ \mathbb{E}(Y)\alpha & + & \beta & = & \mathbb{E}(X)\end{cases}$$
On remarque que le déterminant est $\mathbb{V}(Y)$, non nul car Y n'est pas constante. Et on trouve
$$\alpha=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{V}(Y)}\quad,\quad\beta=\frac{\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{V}(Y)}$$

Pour le calcul de la distance, il est utile de remarquer que $\left(1, \dfrac{1}{\sigma(Y)}(Y-\mathbb{E}(Y))\right)$ est une base orthonormale du plan $\mathrm{Vect}(1,Y)$ (facile à voir si on a compris la deuxième question). Donc avec les notations précédentes,

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \|X\|^2 - \left[(X|1)^2 + \frac{1}{\mathbb{V}(Y)}(X|Y-\mathbb{E}(Y))^2\right]$$

ou encore

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - \frac{1}{\mathbb{V}(Y)}(\mathrm{Cov}(X,Y))^2$$

D'où finalement

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \frac{1}{\mathbb{V}(Y)}\left[\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) - (\mathrm{Cov}(X,Y))^2\right]$$

5. De la question précédente, ou de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en effet, on remarque que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = (X-\mathbb{E}(X)|Y-\mathbb{E}(Y)) \qquad)$$

on déduit l'encadrement proposé. Avec égalité si et seulement si Y est constante ou X est de la forme $aY+b$.

24 Le problème du collectionneur

Un écolier collectionne des images. Il y a en tout n images différentes. L'écolier achète chaque jour une pochette ; chaque pochette contient une image, qui augmente sa collection d'une unité s'il ne la possédait pas déjà. On suppose bien sûr que lorsqu'on achète une pochette, la probabilité d'y trouver l'image i ($1 \leqslant i \leqslant n$) est $1/n$.

1. Supposons que la collection de l'écolier contienne déjà $k-1$ images ($2 \leqslant k \leqslant n$). On note L_k le nombre de pochettes que l'écolier va devoir acheter pour augmenter sa collection d'une unité (et ainsi posséder k images). Quelle est la loi de L_k ?
2. On note $T_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ le nombre total de pochettes que l'écolier va acheter pour avoir la collection complète (pour des raisons évidentes, L_1 désigne la variable aléatoire constante égale à 1). Calculer $\mathbb{E}(T_n)$. En donner un équivalent quand $n \to +\infty$.
3. Calculer $\mathbb{V}(T_n)$, en donner un équivalent. On rappelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution de 24 : Le problème du collectionneur

1. Les achats de pochettes sont supposés indépendants, et un achat est un succès avec la probabilité $\dfrac{n-k+1}{n}$. Donc L_k suit une loi géométrique $\mathscr{G}\left(\dfrac{n-k+1}{n}\right)$.

2. Et donc l'espérance est

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}$$

Un équivalent est donc $n \ln n$.

3. Les L_k sont considérés deux à deux indépendants. On a

$$V(L_1 + \cdots + L_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right) \frac{n^2}{(n-k+1)^2} = n^2\sigma_n - nH_n$$

où (σ_n) converge vers $\pi^2/6$. Un équivalent est donc $\dfrac{\pi^2}{6}n^2$.

25 L'espérance via une loi conditionnelle

1. On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X=x) \neq 0} \mathbb{E}(Y|X=x)\mathbb{P}(X=x)$$
où l'on désigne par $\mathbb{E}(Y|X=x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$.

2. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale**
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X \mid A_k)\mathbb{P}(A_k).$$
3. Soit n et r dans $\mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1, \ldots, U_n$. Dans l'urne j, il y a j boules blanches et $n-j$ boules noires. On effectue r tirages avec remise dans une urne choisie au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au bout des r tirages.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution de 25 : L'espérance via une loi conditionnelle

Rappelons que la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ est définie par, pour $y \in Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}_{Y|X=x}(\{y\}) = \mathbb{P}(Y=y|X=x)$$

(il faut supposer $\mathbb{P}(X=x) \neq 0$, oubli de l'énoncé).

Commençons par supposer $Y \geqslant 0$. Pour $y \in Y(\omega)$, la famille

$$\big(y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$$

est sommable, de somme $y\mathbb{P}(Y=y)$ (formule des probabilités totales). Et la famille $\big(y\mathbb{P}(Y=y)\big)_{y\in Y}$ est sommable (du fait que Y est d'espérance finie). Il en découle, par sommabilité par paquets, que la famille

$$\big(y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

est sommable. Et donc, pour tout $x \in X(\Omega)$, la famille

$$\big(y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{y\in Y(\Omega)}$$

est sommable, donc aussi la famille

$$\big(y\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{y\in Y(\Omega)}$$

ce qui exprime que la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ est d'espérance finie. Et on a

$$\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y|X=x)$$

ce qui permet de dire que la famille $(\mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y|X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; et la formule

$$\sum_{x\in X(\omega)} \mathbb{P}(X=x)\mathbb{E}(Y|X=x) = \sum_{y\in Y(\omega) y\mathbb{P}(Y=y)}$$

donne le résultat.

Si Y n'est pas à valeurs positives, ce qui précède appliqué à $|Y|$ permet d'affirmer que la famille

$$\big(y\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y|X=x)\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

est sommable, on a le droit de la sommer « dans les deux sens » et on obtient la formule.

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{r}{k}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k(n-j)^{r-k}}{n^{r+1}} \quad \text{et } \mathbb{E}(X) = \frac{r(n+1)}{2n}.$$

26 Une autre expression de l'espérance

Soit U variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que U a une espérance finie si et seulement si la famille $(\mathbb{P}(U \geqslant j))_{j\in\mathbb{N}^*}$ est sommable et qu'alors

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U \geqslant j).$$

Solution de 26 : Une autre expression de l'espérance

La σ-additivité montre que, pour tout $j \geqslant 1$,

$$\mathrm{P}(U \geqslant j) = \sum_{k=j}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k)$$

(il est naturel de faire intervenir les $\mathrm{P}(U = k)$ vu la formule de définition de l'espérance d'une variable à valeurs entières). On doit donc étudier

$$\sum_{j \geqslant 1} \left(\sum_{k=j}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k) \right)$$

ce qui conduit naturellement, pour pouvoir utiliser la théorie de la sommabilité des suites doubles, à introduire la suite double $\left(\alpha_{j,k}\right)_{(j,k)\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\alpha_{j,k} = \mathrm{P}(U = k) \quad \text{si } 1 \leqslant j \leqslant k, \qquad \alpha_{j,k} = 0 \quad \text{sinon}$$

C'est une suite double de réels **positifs**. On peut donc directement lui appliquer les résultats sur la sommabilité « par paquets » sans avoir à mettre des valeurs absolues.

Remarquons que (*paquets à j fixé*), pour tout $j \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{k \geqslant 0} \alpha_{j,k}$ converge, et sa somme vaut $\sigma_j = 0$ si $j = 0$, $\sigma_j = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{j,k} = \sum_{k=j}^{+\infty} \alpha_{j,k} = \mathrm{P}(U \geqslant j)$ sinon.

Remarquons d'autre part (*paquets à k fixé*) que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{j \geqslant 0} \alpha_{j,k}$ converge. Et sa somme vaut $s_k = 0$ si $k = 0$, $s_k = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_{j,k} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,k} = k\mathrm{P}(U = k)$ sinon.

Par théorème de sommabilité et sommation par paquets, les trois énoncés suivants sont équivalents :

(i) La famille $\left(\alpha_{j,k}\right)_{(j,k)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.

(ii) La série $\sum_j \sigma_j$ converge.

(iii) La série $\sum_k s_k$ converge.

Et le cas échéant (*C'est la façon snob classique de dire « si c'est le cas ». Vérifier que vous savez bien conjuguer le verbe échoir à tous les temps, tous les modes. Indication : c'est la même chose que choir*), $\sum_{j=0}^{+\infty} \sigma_j = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k$ (la valeur commune est la somme de la suite double : $\sum_{(j,k)\in\mathbf{N}^2} \alpha_{i,j}$). Or l'énoncé (iii) est par définition de l'espérance équivalent à « U a une espérance ». Quand U a une espérance, on a donc bien $\sum_{j \geqslant 1} \mathrm{P}(U \geqslant j)$ convergente, et $\sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U \geqslant j) = \mathrm{E}(U)$. Dans le cas contraire, ces deux choses sont aussi égales, à condition de leur attribuer la valeur $+\infty$.

C'est une question classique et importante, qui demande de bien maîtriser les bases de la sommabilité. Bien entendu, si on rencontre dans un problème la formulation « on suppose que U est d'espérance finie, montrer que $\sum_j P(U \geqslant j)$ converge et que sa somme vaut $E(U)$, c'est un peu plus facile à rédiger. Le faire est un très bon entraînement. Notons enfin que cette formule a été admise à l'écrit math 2 des Mines 2015. On peut considérer que la démonstration n'en est pas évidente.

27 Pile ou Face : longueur des premières séquences

On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPPFFFF\ldots \qquad FFFPFPPPFPPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.
3. Montrer que $\mathbb{E}(L_1) \geqslant \mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_1) \geqslant \mathbb{V}(L_2)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.
5. Calculer $\lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}(L_2 = n | L_1 = m)$

Solution de 27 : Pile ou Face : longueur des premières séquences

On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPPFFFF\ldots$$

$$FFFPFPPPFPPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.

On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le ième lancer donne Pile, égale à 0 sinon. Comme d'habitude, la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

La variable aléatoire L_1 est à valeurs dans $\mathbf{N}_*$. Par probabilités totales, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} P(L_1 = n) &= P(L_1 = n, X_1 = 0) + P(L_1 = n, X_1 = 1) \\ &= P(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0, X_{n+1} = 1) + P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1, X_{n+1} = 0) \\ &= (1-p)^n p + p^n (1-p) \end{aligned}$$

Ce qui donne, l'espérance étant manifestement finie,

$$\begin{aligned} E(L_1) &= p(1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \; + \; p(1-p) \sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} \\ &= p(1-p)\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2}\right) \\ &= \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

On est rassuré de voir que cette espérance est symétrique en p et $1-p$, qu'elle est minimale quand $p = 1/2$ (étudier les variations de $x + 1/x$ quand $x > 0$), qu'elle tend vers l'infini quand p tend vers 0 ou 1…

Maintenant,

$$\begin{aligned} E(L_1(L_1-1)) &= p(1-p)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} \; + \; p^2(1-p) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p^{n-2} \\ &= p(1-p)\left((1-p)\frac{2}{p^3} + p\frac{2}{(1-p)^3}\right) \\ &= 2\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right) \end{aligned}$$

et donc, $V(L_1) = 2\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right) + \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} - \left(\frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}\right)^2$ ou, en simplifiant un peu,

$$V(L_1) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p} - 2$$

---

2. Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.

Le plus simple est de calculer la loi conjointe de (L_1, L_2), i.e. de calculer

$$P(L_1 = n, L_2 = m)$$

pour tout couple $(n, m) \in \mathbf{N}_*^2$, puis d'utiiser les probabilités totales. On peut aussi utiliser le caractère sans mémoire de la loi géométrique.

Si on ne veut rien utiliser, on peut, par probabilités totales, la variable L_2 étant à valeurs dans $\mathbf{N}_*$, écrire

$$\begin{aligned}
P(L_2 = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = 0, L_1 = n, L_2 = m) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = 1, L_1 = n, L_2 = m) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = \ldots = X_n = 0, X_{n+1} = \ldots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0) + \\
&\quad \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1, X_{n+1} = \ldots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n p^m (1-p) + \sum_{n=1}^{+\infty} p^n (1-p)^m p \\
&= (1-p)^2 p^{m-1} + p^2 (1-p)^{m-1}
\end{aligned}$$

Donc, facilement,

$$E(L_2) = 2$$

Surprenant ? nullement si $p = 1/2$ (il est clair que dans ce cas les lois de L_1 et de L_2 sont les mêmes). Si p est proche de 0 ou 1 : avec une probabilité forte, la première séquence est longue, et la deuxième courte. Et avec une probabilité faible, la première séquence est courte, la deuxième longue. On peut donc accepter que cela se compense en moyenne.
De

$$E\left(L_2(L_2-1)\right) = p(1-p)^2 \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)p^{m-2} + p^2(1-p) \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)(1-p)^{m-2}$$

on déduit

$$\begin{aligned}
V(L_2) &= p(1-p)^2 \frac{2}{(1-p)^3} + p^2(1-p)\frac{2}{p^3} + 2 - 4 \\
&= 2\left(\frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - 1\right)
\end{aligned}$$

---

3. Montrer que $\mathbb{E}(L_1) \geqslant \mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_1) \geqslant \mathbb{V}(L_2)$.

Montrer que $V(L_1) \geqslant V(L_2)$ revient alors à montrer que, si $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2} + x^2 \geqslant x + \frac{1}{x}$$

ou encore, en posant $y = x + 1/x$, que

$$y^2 - 2 \geqslant y$$

si $y \geqslant 2$, ce qui est vrai.

---

4. Calculer $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.

Par transfert, on calcule

$$\begin{aligned}
E(L_1 L_2) &= \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}_*^2} mnP(L_1 = n, L_2 = m) \\
&= \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}_*^2} mn\left(p^n(1-p)^m p + (1-p)^n p^m (1-p)\right) \\
&= \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}_*^2} mn\left(p^{n+1}(1-p)^m + (1-p)^{n+1} p^m\right) \\
&= (1-p)\frac{1}{p^2} p^2 \frac{1}{(1-p)^2} + p\frac{1}{(1-p)^2}(1-p)^2 \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

(suites doubles produits de deux suites sommables. . .). Donc, après simplifications,

$$\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} - 2\left(\frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}\right)$$

que l'on arrange un peu, pour vérifier :

$$\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1-2p}{1-p} + \frac{2p-1}{p} = -\frac{(1-2p)^2}{p(1-p)}$$

la covariance est nulle si $p = 1/2$, attendu car L_1 et L_2 sont intuitivement indépendantes dans ce cas. Elle est en général négative, ce qui est aussi assez intuitif (si la première séquence est particulièrement longue, c'est en général qu'elle est obtenue avec le côté de la pièce qui a le plus de chance de se montrer, la deuxième séquence aura tendance à être courte. . .).

---

5. Calculer $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbb{P}(L_2 = n | L_1 = m)$

Calculons enfin une probabilité conditionnelle :

$$\frac{P(L_2 = n, L_1 = m)}{P(L_1 = m)} = \frac{p^{m+1}(1-p)^n + (1-p)^{m+1}p^n}{p^m(1-p) + (1-p)^m p}$$

que l'on peut légèrement simplifier, et qui tend, quand m tend vers $+\infty$, vers $p(1-p)^{n-1}$ si $p > 1/2$, vers $(1-p)p^{n-1}$ si $p < 1/2$, les deux si $p = 1/2$. . . de nouveau, ce n'est par complètement contre-intuitif. . .

28 Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[0,1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la fonction polynôme de Bernstein défini par

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Soit, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, pour tout $x \in]0,1[$, une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre x. On note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$.
2. Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $\delta(\varepsilon)$ (appelé module de continuité) défini par

$$\delta(\varepsilon) = \sup\left\{\left|f(x) - f(y)\right|,\ x, y \in [0,1] \text{ et } \left|x - y\right| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

   (a) Montrer que $\delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

   (b) Montrer, en utilisant une inégalité du programme, que

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|B_n(x) - f(x)\right| \leqslant \delta(\varepsilon) + \frac{2\left\|f\right\|_\infty}{n\varepsilon^2}.$$

   (c) En déduire que la suite de fonctions polynômes B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Solution de 28 : Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

1. C'est $B_n(x)$ par la formule de transfert.
2. (a) C'est une conséquence de l'uniforme continuité de f continue sur le segment $[0,1]$ (théorème de Heine).

   (b) Soit séparer avec des fonctions indicatrices de $\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \varepsilon\right)$ et $\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leqslant \varepsilon\right)$, soit directement dans l'espérance...

   (c) Prendre $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. ⚠ Il en dangereux de séparer les limite $n \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ pour des problèmes de double-limite ou de dépendance...