Variables aléatoires

Exercices vus en cours

1 **CCINP 109** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

2 **CCINP 104** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

3 On lance deux dés équilibrés, et on appelle X est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit.
Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X, Y).

4 Soient X_1, X_2 variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1, 1\}$ et $X_3 = X_1 \times X_2$.

Montrer que X_1, X_2, X_3 sont deux à deux indépendantes, mais ne le sont pas mutuellement.

5 **CCINP 98** Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

6 Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, montrer que $Y = n - X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, q)$.

7 **CCINP 95** Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

8 **CCINP 102** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

9 **CCINP 106** X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

10 **CCINP 111** On admet, dans cet exercice, que $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0, 1[$.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par

$$\forall\, (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

11 CCINP 103

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

12 CCINP 108

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i) \cap (Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

13 CCINP 96

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \dbinom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \dbinom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

14 CCINP 97

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\big((X,Y) = (j,k)\big) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

15 CCINP 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

16 CCINP 100

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

17 CCINP 110

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Autres exercices

18 Soit X, Y, Z, T quatre variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y, Z, T suivent toutes une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
   (b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
   (c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. (a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
   (b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
   (c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.

19 **Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock**

Le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente étant supposé suivre une loi de Poisson[1] de paramètre λ.

Un client achète un article A avec probabilité p (il en achète au plus un).

Le **stock** d'articles A à l'ouverture du magasin est de $s \geqslant 1$ articles.

On veut calculer la loi du nombre total T d'articles demandés en une journée et la probabilité qu'il n'y ait pas **rupture de stock** de l'article A durant cette journée.

On modélise la situation de la manière suivante : on se donne une variable aléatoire N, représentant le nombre de clients entrant dans le magasin durant la journée, et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, représentant la décision d'achat du n^e client : $X_n = 1$ s'il achète, $X_n = 0$ sinon. On suppose toutes ces variables aléatoires **indépendantes**.

On suppose que la loi de N est la **loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p.

Le nombre total d'articles demandés en une journée est la variable aléatoire T définie par $T = \mathbb{1}_{(N\geqslant 1)} \sum_{j=1}^{N} X_j$.

On demande la loi de T et la probabilité $\mathbb{P}(T \leqslant s)$.

20 **...suite** Le nombre de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente étant supposé suivre une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Les probabilités respectives pour chaque client d'acheté zéro, un ou deux articles A sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Le nombre d'articles en question achetés pendant une journée est une variable aléatoire S. On étudie la loi de S grâce à son fonction génératrice.

On modélise la situation de la manière suivante : on se donne une variable aléatoire N, représentant le nombre de clients entrant dans le magasin durant la journée, et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, la loi de N est la **loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$ et X_n représente le nombre d'achats d'article A du n^e client de loi $\mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$.

On définit enfin $T = \mathbb{1}_{(N\geqslant 1)} \sum_{j=1}^{N} X_j$.

1. Calculer la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T, en tout $t \in [-1, 1]$.
2. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(T = 3)$ et la calculer numériquement pour $\lambda = 6$.
3. Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$ et donner leur valeur. Les calculer numériquement pour $\lambda = 6$.

1. Cohérent avec l'approximation des lois binomiales par des lois de Poisson vue en cours.

21 **Loi binomiale négative**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire S_2.
2. Montrer que pour $0 < n < k$, $\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} = \binom{k-1}{n}$.
   On pourra par exemple introduire $P(x) = \sum_{n=1}^{k-1} \left(\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} \right) x^n$.
3. Calculer par récurrence la loi de la variable aléatoire S_n.
4. On joue à Pile ou Face ; on note T_k le numéro du k-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T (loi binomiale négative). Combien vaut l'espérance de T ?
   La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurrence d'un événement ; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi binomiale négative », donne le temps d'attente de la k^e occurrence de cet événement.

22 **Embranchement routier** On se place à un embranchement routier. Le nombre de véhicules arrivant pendant un intervalle de temps d'une heure est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Les véhicules ne peuvent prendre que l'une des directions A ou B, et la variable aléatoire Y représente le nombre de véhicules empruntant la direction A pendant cet intervalle de temps.

Chaque véhicule prend la direction A avec la probabilité p et les choix sont faits de manière indépendante.

C'est pourquoi on suppose que si n véhicules arrivent à l'embranchement pendant une heure donnée, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Déterminer la loi de Y ainsi que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnelle à l'événement $(Y = k)$ (du nombre de véhicules arrivés à l'embranchement sachant que k véhicules ont emprunté la direction A).

23 **Un peu de théorie préhilbertienne** Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dénombrable, tel que

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) \neq 0$$

On notera $\mathscr{L}^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ qui admettent un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathscr{L}^2$ est un espace vectoriel, et que
$$(X|Y) = \mathbb{E}(XY)$$
   définit un produit scalaire sur cet espace.
2. Si $X \in \mathscr{L}^2$, déterminer le projeté orthogonal de X sur l'espace des variables aléatoires constantes. Déterminer la distance de X à cet espace.
3. À partir de la question précédente, retrouver la formule
$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$
4. Si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{L}^2$, X non constante, déterminer la projection orthogonale de X sur $\{aY + b \; ; \; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Calculer la distance de X a ce plan.
5. Si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{L}^2$, on définit leur coefficient de corrélation linéaire :
$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$
   Montrer que $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$. Quand ce coefficient est-il égal à ± 1 ?
6. Soit X, Y deux éléments de $\mathscr{L}^2$. On note
$$F = \left\{ Z \in \mathscr{L}^2 \; ; \; \exists (a_x)_{x\in X(\Omega)} \in \mathbb{R}^{X(\Omega)} \quad Z = \sum_{x\in X(\Omega)} a_x \mathbb{1}_{(X=x)} \right\}$$
   déterminer, s'il existe, le projeté orthogonal de Y sur F (on suppose, pour tout x, $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$).

24 Le problème du collectionneur

Un écolier collectionne des images. Il y a en tout n images différentes. L'écolier achète chaque jour une pochette ; chaque pochette contient une image, qui augmente sa collection d'une unité s'il ne la possédait pas déjà. On suppose bien sûr que lorsqu'on achète une pochette, la probabilité d'y trouver l'image i ($1 \leqslant i \leqslant n$) est $1/n$.

1. Supposons que la collection de l'écolier contienne déjà $k-1$ images ($2 \leqslant k \leqslant n$). On note L_k le nombre de pochettes que l'écolier va devoir acheter pour augmenter sa collection d'une unité (et ainsi posséder k images). Quelle est la loi de L_k ?
2. On note $T_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ le nombre total de pochettes que l'écolier va acheter pour avoir la collection complète (pour des raisons évidentes, L_1 désigne la variable aléatoire constante égale à 1). Calculer $\mathbb{E}(T_n)$. En donner un équivalent quand $n \to +\infty$.
3. Calculer $\mathbb{V}(T_n)$, en donner un équivalent. On rappelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

25 L'espérance via une loi conditionnelle

1. On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X=x) \neq 0} \mathbb{E}(Y|X=x)\mathbb{P}(X=x)$$

où l'on désigne par $\mathbb{E}(Y|X=x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$.

2. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X \mid A_k)\mathbb{P}(A_k).$$

3. Soit n et r dans $\mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1, \ldots, U_n$. Dans l'urne j, il y a j boules blanches et $n-j$ boules noires. On effectue r tirages avec remise dans une urne choisie au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au bout des r tirages.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

26 Une autre expression de l'espérance

Soit U variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que U a une espérance finie si et seulement si la famille $(\mathbb{P}(U \geqslant j))_{j \in \mathbb{N}^*}$ est sommable et qu'alors

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U \geqslant j).$$

27 Pile ou Face : longueur des premières séquences

On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPPFPFFF\ldots \qquad FFFPFPPPFPPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.
3. Montrer que $\mathbb{E}(L_1) \geqslant \mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_1) \geqslant \mathbb{V}(L_2)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \mathbb{P}(L_2 = n | L_1 = m)$

28 Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[0,1]$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la fonction polynôme de Bernstein défini par

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Soit, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, pour tout $x \in]0,1[$, une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires de même loi de Bernoulli de paramètre x. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$.
2. Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $\delta(\varepsilon)$ (appelé module de continuité) défini par

$$\delta(\varepsilon) = \sup\left\{\left|f(x) - f(y)\right|,\ x, y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

   (a) Montrer que $\delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.
   (b) Montrer, en utilisant une inégalité du programme, que

$$\sup_{x \in [0,1]} \left|B_n(x) - f(x)\right| \leqslant \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}.$$

   (c) En déduire que la suite de fonctions polynômes B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.