Exercices vus en cours

1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n} z^n$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^n$
5. $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$
6. $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$

Solution de 1 :

1. **Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$.**

   Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$, donc $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ convergence absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc $R = +\infty$.
2. **Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$.**

   Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{(n+1)^2 |z|^{n+1}}{n^2 |z|^n} \to |z|$, donc $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ convergence absolument si $|z| < 1$ et diverge grossièrement si $|z| > 1$, donc $R = 1$.
3. **Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n} z^n$.**

   Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{|z|^{n+1} (n+1)! n^n}{(n+1)^{n+1} |z|^n n!} = \frac{|z|}{(1+1/n)^n} \to \mathrm{e}^{-1} |z|$, donc $R = \mathrm{e}$.
4. **Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^n$.**

   Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{(n+1)^2 |z|^{n+1} 2^n}{n^2 |z|^n 2^{n+1}} \to \frac{|z|}{2}$, donc $R = 2$.
5. **Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$.**

   Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{(n+1)! |z|^{n+1}}{n! |z|^n} \to +\infty$, donc $R = 0$.
   Bon, pour cet exemple, pas besoin de d'Alembert, on a directement que si $z \neq 0$, $n! z^n \not\to 0$...
6. **Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{n^4 + n^3 + 1}{2\sqrt{n} + 3}$.**

   Dans cet exemple, mieux vaut passer par un équivalent : pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{|a_{n+1}| |z|^{n+1}}{|a_n| |z|^n} \sim |z|$, donc $R = 1$.
7. **Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$ (série entière lacuniare).**

   Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{(n+1)^2 |z|^{2n+2} 2^n}{n^2 |z|^{2n} 2^{n+1}} \to \frac{|z|^2}{2}$, donc $R = \sqrt{2}$.

8. **Rayon de convergence de** $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n}$**.**

   Pour $z=-1$, la série est semi-convergente. Donc $R=1$.
   On aurait aussi pu appliquer le critère de d'Alembert.

2 CCINP 20

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n+1}$. (b) $\sum n^{(-1)^n}z^n$. (c) $\sum \cos n z^n$.

Solution de 2 : CCINP 20

1. Voir cours.
2. (a) Notons R le rayon de convergence de $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n+1}$ et posons : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z\in\mathbb{C}$, $u_n(z)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n+1}$.
   Pour $z=0$, $\sum u_n(0)$ converge.
   Pour $z\neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\frac{n+1}{4n+2}|z|^2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\frac{|z|^2}{4}$.
   D'après la règle de d'Alembert,
   Pour $|z|<2$, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.
   Pour $|z|>2$, la série numérique diverge grossièrement.
   On en déduit que R=2.

   (b) Notons R le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n}z^n$ et posons : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $a_n=n^{(-1)^n}$.
   On a, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $|a_nz^n|\leqslant|nz^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum nz^n$ vaut 1.
   Donc $R\geqslant 1$. (*)
   De même, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $|\frac{1}{n}z^n|\leqslant|a_nz^n|$ et le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}z^n$ vaut 1.
   Donc $R\leqslant 1$. (**)
   D'après (*) et (**), $R=1$.

   (c) Notons R le rayon de convergence de $\sum \cos n z^n$et posons : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $a_n=\cos n$.
   On a, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $|a_nz^n|\leqslant|z^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ vaut 1.
   Donc $R\geqslant 1$. (*)

   Pour $z=1$, la série $\sum \cos n z^n=\sum\cos n$ diverge grossièrement car $\cos n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
   Donc $R\leqslant 1$. (**)
   D'après (*) et (**), $R=1$.

3 CCINP 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nz^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$?

Solution de 3 : CCINP 21

1.
2. Puisque $\sum a_n 1^n$ diverge, $R \leqslant 1$.
   Puisque $(a_n 1^n)$ est bornée, $R \leqslant 1$.
   Donc $R = 1$.
3. $\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite équivalente à $(\sqrt{n})^{(-1)^n - 1}$ donc bornée en séparant n pair ou impair et $\sum \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge grossièrement donc $R = 1$.

4 **Oral Mines** Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$.

Solution de 4 : Oral Mines

Comme (a_n) est bornée $R \geqslant 1$.
Mais $a_n \not\to 0$ (car $\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$), donc $R \leqslant 1$.
Finalement, $R = 1$.

5 **Oral X** Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$.

Solution de 5 : Oral X

Si $|z| < R'$, $|a_n|^2 |z|^n \to 0$ donc $|a_n| \sqrt{|z|}^n \to 0$ donc $\sqrt{|z|} \leqslant R$ et $|z| \leqslant R^2$ donc $R' \leqslant R^2$.
Puis si $|z| < R$, $a_n z^n \to 0$ donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$ donc $|z|^2 < R'$ donc $R' \geqslant R^2$.
Finalement, $R' = R^2$.

6 **CCINP 15** Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Solution de 6 : CCINP 15

1. Voir cours.
2. Voir cours.
3. On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n^2}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

   On en déduit que série entière $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cette série entière converge donc normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
   En particulier, cette série entière converge normalement et donc uniformément, d'après 2., sur tout disque de centre O et de rayon R.

7 **CCINP 18** On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Solution de 7 : CCINP 18

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
   En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.
   En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
   On a donc $D =]-1, 1]$.
2. (a) $\forall\, x \in D$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
   $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in]-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.
   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$ ne converge pas normalement sur D.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, ce qui est absurde.
   (b) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $]-1, 1[$. $(*)$
   Pour étudier la continuité en 1, on peut se placer sur $[0, 1]$.
   $\forall\, x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste.
   On a, $\forall\, x \in [0, 1]$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)
   Et, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
   Donc, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
   Les fonctions u_n étant continues sur $[0, 1]$, la somme S est alors continue sur $[0, 1]$.
   Donc, en particulier, S est continue en 1. $(**)$
   Donc, d'après $(*)$ et $(**)$, S est continue sur D.

8 **CCINP 47** Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Solution de 8 : CCINP 47

1. On note R le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ et pour tout réel x, on pose $u_n(x) = \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
   Pour x non nul, $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{3nx^2}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |3x^2|$.
   Donc, d'après la règle de d'Alembert :
   si $|3x^2| < 1$ c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument
   et si $|3x^2| > 1$ c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge.
   On en déduit que $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
   On pose : $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
   On a : $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x^2)^n}{n}$.
   Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a : $\forall\, t \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.
   Ainsi : $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = -\ln(1-3x^2)$.

2. Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
   On considère les séries $\sum a_{2n} x^{2n} = \sum 4^n x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum 5^{n+1} x^{2n+1}$.

   Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum 4^n x^{2n}$ et R_2 le rayon de convergence de $\sum 5^{n+1} x^{2n+1}$.
   Le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1.
   Or, $\sum 4^n x^{2n} = \sum (4x^2)^n$.
   Donc pour $|4x^2| < 1$ c'est-à-dire $|x| < \frac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ converge absolument
   et pour $|4x^2| > 1$ c'est-à-dire $|x| > \frac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ diverge.
   On en déduit que $R_1 = \frac{1}{2}$.
   Par un raisonnement similaire et comme $\sum 5^{n+1} x^{2n+1} = 5x \sum (5x^2)^n$, on trouve $R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   $\sum a_n x^n$ étant la série somme des séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$, on en déduit, comme $R_1 \neq R_2$, que $R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   D'après ce qui précède, on en déduit également que :
   $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x^2)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} (5x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}$.

9 **CCINP 23** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

Solution de 9 : CCINP 23

1. Pour $x \neq 0$, posons $u_n(x) = a_n x^n$ et $v_n(x) = (n+1)a_{n+1}x^n$.
   On pose $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
   On a, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \ell|x|$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = \ell|x|$.

   On en déduit que le rayon de convergence des deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ vaut $R = 1/\ell$ (avec $R = +\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R = 0$ dans le cas $\ell = +\infty$).
2. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
   On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in\,]-R, R[$, $f_n(x) = a_n x^n$.
   Soit $r \in [0, R[$. On pose $D_r = [-r, r]$.
   i) $\sum f_n$ converge simplement sur D_r.
   ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_r .
   iii) D'après 1., $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence R.
   Donc, d'après le cours, $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans $]-R, R[$, donc converge uniformément sur D_r.
   On en déduit que $\forall\, r \in [0, R[$, $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_r.

   Donc, S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$.

10

1. Déterminer le rayon de convergence R, puis calculer sur $]-R, R[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.
2. Si $n \geqslant 1$, on pose $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Déterminer le rayon de convergence r de $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n x^n$ et calculer pour $x \in]-r, r[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n x^n$

Solution de 10 :

- **Partons d'une série entière simple et plutôt célèbre :**
  $$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$
  On peut dériver ou primitiver autant qu'on veut. Par exemple :
  $$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$
  $$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$
  Et ainsi de suite…
- **On prend vite l'habitude de « bricoler » si on n'a pas exactement la forme voulue pour les séries entières que l'on veut calculer :**
  $$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n =$$
  $$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} =$$

- **Il n'y a pas que la primitivation et la dérivation : les opérations algébriques (combinaison linéaire, produit) sont aussi bien utiles. Par exemple, définissons, si $n \geqslant 1$,**

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n$ est $r = 1$ et on calcule

$$\forall x \in]-r, r[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

Remarquons que, pour tout n, $h_n \geqslant 1$. Donc $r \leqslant 1$ (la série $\sum h_n 1^n$ diverge grossièrement, donc 1 n'est pas dans le disque ouvert de convergence). Mais aussi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$h_n \leqslant n \times 1 = n$$

(majoration d'une somme par le nombre de termes multiplié par le plus grand d'entre eux). Donc $r \geqslant 1$ (en effet, si $|x| < 1$, $h_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc $|x| \leqslant r$).

Notons que l'équivalent célèbre $h_n \sim \ln n$ n'est pas nécessaire ici : très souvent, la détermination d'un rayon de convergence est assez grossière.

Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = 1$ et, si $n \geqslant 1$, $b_n = \frac{1}{n}$. On définit aussi $b_0 = 0$. On a construit ces deux suites pour avoir, en posant $h_0 = 0$:

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad h_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$$

On peut alors appliquer le théorème sur le produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

d'où

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

11 Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est R, si $R \in]0, +\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, montrer que $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R, R]$.

Solution de 11 :

Il y a convergence normale sur $[-R, R]$.

12

1. Montrer que f, prolongement par continuité de $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ en 0, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de Taylor de f a un rayon de convergence infini.
3. Montrer que la fonction f n'est pas développable en série entière.

Solution de 12 :

Notons en effet f cette fonction. On a vu que f était de classe C^∞, et que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$f^{(k)}(0) = 0$$

Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$ ($r > 0$), alors elle est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle, c'est-à-dire

$$\forall x \in]-r, r[\qquad f(x) = 0$$

ce qui est manifestement faux. Donc f n'est pas développable en série entière autour de 0.

13 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$.

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

14 En utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Solution de 14 :

En effet, le TSSA nous assure la convergence uniforme sur $[-1, 0]$ et donc la continuité en -1.

15 Justifier que Arcsin est développable en série entière et donner son développement.

Même question pour Arccos.

16 **CCINP 51**

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Solution de 16 : CCINP 51

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

   On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4 (2n+3)} = \dfrac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4}$.

   Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4} < 1$.

   Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. D'après le cours, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$.

   De plus, $\forall\, u \in]-1,1[$, $(1+u)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} u^n$.

   En particulier, pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $u = -t$:

   $R = 1$ et $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)(-3)\cdots\big(-(2n-1)\big)}{2^n n!}(-t)^n$.

   En multipliant numérateur et dénominateur par $2.4.\ldots 2n = 2^n n!$, on obtient :

   $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$

   Conclusion : $R = 1$ et $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$.

3. D'après la question précédente, en remarquant que : $x \in]-1,1[\Leftrightarrow t = x^2 \in [0,1[$ et $[0,1[\subset]-1,1[$, il vient :

   $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$ avec un rayon de convergence $R = 1$.

   Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\text{Arcsin}' : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé.

   De plus, on obtient :

   $\forall x \in]-1,1[$, $\text{Arcsin}\, x = \underbrace{\text{Arcsin}\, 0}_{=0} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$ avec un rayon de convergence $R = 1$.

4. Prenons $x = \dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ dans le développement précédent.

   On en déduit que $\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \dfrac{1}{2^{2n+1}}$.

   C'est-à-dire, en remarquant que $\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, on obtient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)} = \dfrac{\pi}{3}$.

17 **CCINP 2** On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r > 0$). Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Solution de 17 : CCINP 2

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve : $f(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2}$.

2. D'après le cours, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ sont développables en série entière à l'origine.

   De plus, on a $\forall\, x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.

   Et, $\forall\, x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} n x^{n-1}$ (obtenu par dérivation du développement précédent).

   On en déduit que f est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière.

   Et $\forall\, x \in]-1,1[,\ f(x) = 3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + 4\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n (n+1) x^n$.

   C'est-à-dire : $\forall\, x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(4n+7)(-1)^n x^n$.

   Notons D le domaine de validité du développement en série entière de f.

   D'après ce qui précède, $]-1,1[\, \subset D$.

   Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum (4n+7)(-1)^n x^n$.

   D'après ce qui précède $R \geqslant 1$.

   Posons, pour tout entier naturel n, $a_n = (4n+7)(-1)^n$.

   Pour $x = 1$ et $x = -1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n x^n| = +\infty$ donc $\sum (4n+7)(-1)^n x^n$ diverge grossièrement.

   Donc $R \leqslant 1$, $1 \notin D$ et $-1 \notin D$.

   On en déduit que $D =]-1,1[$.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   D'après le cours, g est de classe C^∞ sur $]-R,R[$.

   De plus, $\forall\, x \in]-R,R[$,

   $g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1) a_{n+1} x^n$

   $g''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$.

   et, par récurrence, on a :

   $\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]-R,R[,\ g^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)...(n+p) a_{n+p} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$.

   Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(0) = p! a_p$.

   C'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}$.

   (b) f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

   Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0, $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{3}\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. $\quad (*)$

   Or, d'après 3.(a), pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ est aussi la valeur du p^{e} coefficient du développement en série entière de f.

   Donc, d'après 2., pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} = (4p+7)(-1)^p$. $\quad (**)$

   Ainsi, d'après $(*)$ et $(**)$, au voisinage de 0, $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{3}(4p+7)(-1)^p x^p + o(x^3)$.

   C'est-à-dire, au voisinage de 0, $f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$.

18 CCINP 22

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x)+\ln(1-2x)$.
   La série obtenue converge-t-elle pour $x=\dfrac{1}{4}$? $x=\dfrac{1}{2}$? $x=-\dfrac{1}{2}$?

Solution de 18 : CCINP 22

1. Voir cours.
2. Pour $|x|<1$, $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.
   Pour $|x|<\dfrac{1}{2}$, $\ln(1-2x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{n}x^n$.
   D'après 1., le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ vaut $\dfrac{1}{2}$.
   Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de f contient $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et est contenu dans $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.
   Et, pour $|x|<\dfrac{1}{2}$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$.
   Pour $x=\dfrac{1}{4}$: la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge car $\left|\dfrac{1}{4}\right|<\dfrac{1}{2}$.
   Pour $x=\dfrac{1}{2}$: la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ diverge car elle est la somme d'une série convergente ($\dfrac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$) et d'une série divergente (série harmonique).
   Pour $x=-\dfrac{1}{2}$: la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge comme somme de deux séries convergentes.
   En effet, d'une part, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\dfrac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.
   D'autre part, $\sum\limits_{n\geqslant 1}-\dfrac{2^n}{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=-\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées (la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien positive, décroissante et de limite nulle).

19 CCINP 32 Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

Solution de 19 : CCINP 32

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
Pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$.
Donc $x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1}\right) x^n$.
Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1} = 0$.
C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1) a_n$.
Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
$x \mapsto a_1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1, 1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.

2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
Prouvons que les solutions de (E) sur $]0;1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine.
Raisonnons par l'absurde.
Si toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall\, x \in]0, 1[$, $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.
Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \longmapsto x(x-1)$, $x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto 1$ sont continues sur $]0, 1[$ et que la fonction $x \longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0, 1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, 1[$ est un plan vectoriel.
D'où l'absurdité.

20 CCINP 24

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0\ .$$
   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Solution de 20 : CCINP 24

1. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$

On en déduit que la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$ et donc $R=+\infty$.

2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

3. (a) Pour $x\geqslant 0$, on peut écrire $x=t^2$ et $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\mathrm{ch}(t)=\mathrm{ch}\sqrt{x}$.

   Pour $x<0$, on peut écrire $x=-t^2$ et $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\cos(t)=\cos\sqrt{-x}$.

   (b) D'après la question précédente, la fonction f n'est autre que la fonction S.
   S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cela prouve que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

21 Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}x^n.$$

Solution de 21 :

Par d'Alembert, $R=2$ (ou parce que le rayon de convergence de $\sum n^2x^n$ vaut 1).

Puis $n^2=n(n-1)+n$ donc $f(2x)=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

Donc pour tout $x\in]-2,2[$, $f(x)=\frac{2x^2+4x}{(2-x)^3}$.

22 Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{n}{(n-1)(n+2)}x^n.$$

Solution de 22 :

Par d'Alembert, $R=1$ (ou parce que le rayon de convergence de $\frac{n}{(n-1)(n+2)}\sim\frac{1}{n}$).

Puis décomposition en éléments simples.

23 **Une application des séries génératrices** En utilisant des séries entières, déterminer le terme général de la suite de Fibonnaci donnée par $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.

Solution de 23 : Une application des séries génératrices

Soit la série entière $\sum F_nx^n$. Sous réserve d'un rayon de convergence $R>0$, on a pour $x\in]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}F_{n+2}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}F_nx^{n+2}$

donc $f(x)-x=x^2f(x)+xf(x)$ soit $(x^2+x-1)f(x)=-x$ et $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ lorsque $1-x-x^2\neq 0$.

Par DES, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{1-\varphi x}-\dfrac{1}{1-\psi x}\right)$ avec $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et on a bien un rayon de convergence >0, puis $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\psi^n\right)x^n$: on retrouve par unicité l'expression des termes de la suite de Fibonacci.

Autres exercices

24 Déterminer les rayons de convergence des séries entières

1. $\sum(\sin n)z^n$
2. $\sum 3^{-n}(1+2/n)^n z^{4n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin n}{n}z^n$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\operatorname{ch} n}{n}z^n$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}z^n$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\binom{2n}{n}z^n$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^{\sqrt{n}}z^n$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)z^n$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n z^n$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)z^n$
12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)z^n$

Solution de 24 :

1. La suite $(\sin n)$ est bornée, le rayon de convergence de $\sum(\sin n)z^n$ est donc $\geqslant 1$. Mais elle ne converge pas vers 0, le rayon de convergence est donc $\leqslant 1$. Pour montrer que la suite $(\sin n)$ ne converge pas vers 0, on peut par exemple utiliser la formule de développement de $\sin(n+1)$, comme $\sin 1\neq 0$ on obtient que $(\cos n)$ convergerait aussi vers 0, ce qui contredit $\cos^2 n+\sin^2 n=1$.
2. si $z\neq 0$,
$$3^{-n}(1+2/n)^n x^{4n}\sim \mathrm{e}^2\left(\frac{x^4}{3}\right)^n$$
qui donne un rayon de convergence égal à $3^{1/4}$.
3. La suite (a_n) converge vers 0. Donc le rayon de convergence est $\geqslant 1$. Réécrivons (technique ordinaire : on met en facteur le terme prépondérant en haut et en bas) :
$$a_n=\ln\left(\frac{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}\right)=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
Donc $a_n\sim\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ce qui ne permet pas de conclure à la convergence ni à la divergence de $\sum a_n$, mais en tout cas $\sum a_n$ ne converge pas absolument, donc le rayon est $\leqslant 1$.
4. $R=1$
5. $R=1/\mathrm{e}$
6. $R=1$
7. $R=1/4$
8. $R=1$
9. $R=1$
10. $R=+\infty$

11.

25 1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$$

en la variable réelle x.

2. La série converge-t-elle pour les valeurs R et $-R$ de la variable ?
3. Démontrer que la convergence est uniforme sur le segment $[-R,0]$.
4. Etudier la limite en R (à gauche) de $(R-x)S(x)$ où S désigne la fonction somme de la série entière.

Solution de 25 :

Le rayon est, d'après le cours, le même que celui de $\sum \frac{1}{n}x^n$, (car $\ln(1+1/n) \sim 1$), donc vaut 1. Pour 1, ça diverge (Riemann, comparaison à la série harmonique), pour -1 ça converge (séries alternées). La convergence uniforme sur $[-1,0]$ est donnée par la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées. Si $x \in [0,1[$, les séries écrites ci-après convergent toutes, on n'a donc pas besoin de passer aux sommes partielles :

$$\begin{aligned}(1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^n\\ &= (\ln 2)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^n\end{aligned}$$

(On a fait ici une transformation d'Abel). Notons $b_n = \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n-1})$. La série $\sum |b_n|$ converge (série télescopique), donc $\sum_{n\geqslant 2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)x^n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$. Ce qui montre que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^n \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n-1})\big) = -\ln 2$$

On obtient donc que $(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ ce qui n'est pas très surprenant : on pourrait avoir l'intuition que S a « le même comportement » au voisinage de 1 que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$, c'est-à-dire $-\ln(1-x)$, ce qui est démontrable mais en utilisant les ϵ.

26 Développer en série entière la fonction $t \longmapsto \int_0^t \sin(u^2)\,du$.

Solution de 26 :

Opérations sur les séries entières :

$$\forall u \in \mathbf{R} \qquad \sin(u^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{4n+2}}{(2n+1)!}\mathrm{d}u$$

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad \int_0^t \sin(u^2)\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(2n+1)!\times(4n+3)}$$

27 **Oral CCINP** Montrer, pour tout $t \in [-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.

Solution de 27 : Oral CCINP

Sur $]-1,1[$, c'est du cours, qu'on retrouve éventuellement par primitivation du DSE de $\frac{1}{1-x}$. En -1, on trouve le résultat en montrant la convergence uniforme de $\sum (t \mapsto \frac{t^n}{n})$ sur $]-1,0]$ ou sur $[-1,0]$ au choix. Dans le premier cas, on appliquera alors le théorème de la double limite, dans le deuxième la transmission de la continuité. La convergence uniforme se montre en utilisant la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées.

28 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0. Démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0,1]$. En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\mathrm{Arctan}\, x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2 \qquad\qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

C'est la manière la plus commode, avec le programme, d'aboutir à la somme de la série harmonique alternée. Il est donc intéressant de savoir faire cette démonstration.

Solution de 28 :

Par théorème spécial sur les séries alternées, $\sum (-1)^n a_n\ (1)^n$ converge. Donc le rayon de convergence est $\geqslant 1$. De plus, la série $\sum (-1)^n a_n x^n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial pour tout $x \in [0,1]$. Ce qui permet, d'une part de définir, pour tout $x \in [0,1]$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k x^k$$

et d'autre part d'écrire, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|R_n(x)| \leqslant a_{n+1} x^{n+1} \leqslant a_{n+1}$$

Ce qui montre la convergence uniforme vers $\widetilde{0}$ de la suite de fonctions (R_n), c'est-à-dire la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \left(x \mapsto (-1)^n a_n x^n\right)$. Les fonctions $x \mapsto (-1)^n a_n x^n$ étant continues, la transmission de la continuité par convergence uniforme conclut.

L'application de ce résultat à la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_n = 1/n$ (on commence à $n = 1$, ça ne change rien) permet de prolonger en 1 l'identité connue

$$\forall x \in [0,1[\qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

d'où la somme de la série harmonique alternée. Pour l'autre série, on dit que, de même, l'identité

$$\forall x \in [0,1[\qquad \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

se prolonge par continuité en 1 (si on tient à se ramener scrupuleusement aux hypothèses précédentes, on peut tout diviser par x, poser $y = \sqrt{x}$, etc... mais il est plus naturel de remarquer que le raisonnement utiisant le théorème spécial marche aussi bien dans ce cas particulier.

29 **Oral TPE** Ecrire $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$ sous forme d'une somme de série.

Solution de 29 : Oral TPE

Les intégrations par parties font tourner en rond... Il faut d'abord montrer l'existence... Du côté de 0, par exemple :

$$\left|\frac{\ln x}{1-x}\right| \sim_{x\to 0} |\ln x| = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$$

qui montre l'intégrabilité sur $]0,1/2]$. Puis du côté de 1, la fonction est prolongeable par continuité, car

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim z_{x\to 1} x-1$$

Ensuite, on peut écrire, si $x \in [0,1[$,

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ \ln x$$

On note $\phi_n \ : \ x \mapsto x^n \ \ln x$ et, par parties :

$$N_1(\phi_n) = -\int_0^1 x^n \ln x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \ \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Le théorème d'interversion s'applique alors, et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

30 Ecrire comme somme d'une série simple l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt$ après avoir prouvé son existence.

Solution de 30 :

En 1, prolongement par continuité. En 0, $-\ln t$ est un équivalent, d'où l'intégrabilité en disant par exemple que c'est négligeable devant $1/x^{1/2}$. Puis on utilise le DSE de $\ln(1-x)$ et une interversion série-intégrale avec le théorème habituel.

31 Trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$. On note $f(x)$ sa somme.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\mathrm{d}t$, si $x > 0$?.

Solution de 31 :

Avec, par exemple, la règle de d'Alembert, on trouve que la série converge toujours. Donc le rayon de convergence vaut $+\infty$. Soit maintenant $x > 0$; on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$e^{-xt} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xt} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$$

Définissons donc, sur $[0,+\infty[$, ϕ_n ($n \in \mathbf{N}$) par

$$\phi_n(t) = e^{-xt} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$$

comme $|\phi_n(t)| = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ϕ_n est continue intégrable (comparaison à l'exemple de Riemann) sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$. $\sum_n \phi_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$, sa somme est continue (on la connaît). On calcule par intégrations par parties successives :

$$N_1(\phi_n) = \frac{1}{n! x^{n+1}}$$

qui est le terme général d'une série convergente (encore d'Alembert par exemple. Mais on peut dire que c'est une série exponentielle). On conclut que $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et que son intégrale est

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \phi_n(t)\ dt = \frac{1}{x} e^{-1/x}$$

32 Pour chacune des séries entières suivantes, préciser le rayon de convergence et calculer la somme au moyen des fonctions usuelles.

1. $\sum_{n\geqslant 0} n^3 z^n$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+2}{n!} z^n$
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n(n+2)}$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \left((3+2(-1)^n\right)^n x^n$
6. $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$
8. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sin(n\theta)$
9. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sin(n\theta)$
10. $\sum_{n\geqslant 0} (\sin n) z^n$

Pour l'un d'eux, on pourra utiliser j...

Solution de 32 :

1. $\sum_{n\geqslant 0} n^3 z^n$: Rayon de convergence : 1. Le plus rapide est de décomposer

$$X^3 = \alpha X(X-1)(X-2) + \beta X(X-1) + \gamma X + \delta$$

(prenant les valeurs en 0, 1, 2, on obtient $\delta = 0$, puis $\gamma = 1$, puis $\beta = 3$, enfin $\alpha = 1$ en égalant les coefficients dominants. Donc

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$$

Or on connaît $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (si $|z| < 1$), $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ (dérivation si la variable réelle, produit de Cauchy si la variable est complexe), $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$ etc. . .

2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+2}{n!} z^n$: On écrit $n^3 = n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$ comme plus haut, pour avoir des simplifications avec la factorielle du dénominateur.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n(n+2)}$: On décompose en éléments simples ou on dérive (il vaut mieux supposer la variable réelle).
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$: Si $x > 0$, on trouve $\mathrm{ch}(\sqrt{x})$. Si $x < 0$, on trouve $\cos(\sqrt{-x})$.
5. $\sum_{n\geqslant 0} \left((3+2(-1)^n\right)^n x^n$: On sépare les termes pairs et les termes impairs.
6. $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$: On sépare les termes pairs et les termes impairs.
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$ (*Mines*) : Le rayon de convergence est infini (critère de D'Alembert si on tient à parler de séries, croissances comparées si on parle de suites bornées). De même que la considération des dse de

$\exp(z)$ et $\exp(-z)$ permet de calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{3n}}{(2n)!}$, on peut avoir l'idée d'écrire les dse de $\exp(z)$, $\exp(jz)$ et $\exp(j^2 z)$. Chacun de ces dse peut se scinder en 3 paquets suivant la congruence modulo 3 de l'indice (les paquets convergent sans problème). En ajoutant, on trouve le résultat, $\dfrac{1}{3}\left(e^z + e^{jz} + e^{j^2 z}\right)$.

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\sin(n\theta)$ (*Mines*) : Rayon de convergence infini encore... mais là, pas par D'Alembert. Les croissances comparées et les suites bornées marchent bien. La notation x incite à penser que la variable est réelle, on fait donc apparaître la somme comme partie imaginaire de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\theta}$ qui est l'exponentielle de $xe^{i\theta}$. On trouve donc

$$e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$$

Si jamais x était complexe non réel, on devrait commencer par écrire

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right)$$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$ (*Mines*) : Commençons par remarquer que le rayon de convergence est $\geqslant 1$. Visiblement, pour θ multiple de π, il est infini. Supposons ici aussi x réel. On passe alors par la dérivation : par théorème de dérivation des séries entières, sur $]-1,1[$ la somme a pour dérivée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(n\theta)$$

On est donc ramené à calculer la partie imaginaire de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta}$$

Or cette série est géométrique...

10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(\sin n)z^n$: C'est la partie imaginaire d'une série géométrique si $z\in\mathbb{R}$, sinon passer par une formule d'Euler.

33 Première question d'un problème des Mines !

Démontrer que la fonction $x\mapsto\exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Solution de 33 : Première question d'un problème des Mines !

On écrit

$$\exp(\exp x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}e^{nx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{n^p x^p}{n!\,p!}\right)$$

Cette écriture permet, en remplaçant x par $|x|$, d'obtenir la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{n^p|x|^p}{n!\,p!}\right)_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$, donc de pouvoir intervertir, ce qui conclut.

34

Développer en série entière, si c'est possible, les fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence.

1. $x\longmapsto(1+x)\ln(1+x)$
2. $x\longmapsto\dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$

3. $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$ (une petite astuce permet d'obtenir des calculs simples)
4. $x \longmapsto \text{Arcsin}^2 x$ en utilisant une équation différentielle liant la dérivée et la dérivée seconde.
5. $x \longmapsto \sin^2 x$ sans, quasiment, faire de calculs.

35 Oral TPE - dénombrement et série génératrice

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1,\ldots,n\}$ (appelés dérangements). On convient $d_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \dfrac{d_n x^n}{n!}$ est $\geqslant 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, prouver : $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Si x est dans $]-1,1[$, calculer $\mathrm{e}^x \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$ et en déduire : $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{d_n}{n!}$. Interprétation ?

36 Transformation d'Abel et théorème d'Abel - voir aussi CCP 2005

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R (on suppose que R est un réel strictement positif). Soit z_0 un nombre complexe de module R, tel que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. On veut démontrer qu'alors la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$.

1. On se place dans le cas où $z_0 = R = 1$. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $\rho_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.
   Soit x un élément du segment $[0,1]$. Pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul p, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \rho_n x^{n+1} - \rho_{n+p} x^{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \rho_k x^k (x-1)$ (remarquer que $a_k = \rho_{k-1} - \rho_k$).
   En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \rho_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho_k x^k (x-1)$
   En déduire la convergence uniforme de $\sum a_n x^n$ sur le segment $[0,1]$.
2. Démontrer que le cas général peut se ramener au cas précédent.
3. Soit θ un élément de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On rappelle (cela se démontre à l'aide d'une transformation d'Abel) que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ converge. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} z^n$. Son rayon de convergence est donc au moins égal à 1. On note ϕ sa somme. Démontrer que, pour tout réel $t \in [0,1[$,
$$\phi(t) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - 2t\cos\theta + t^2\right)$$
   (on pourra d'abord calculer $\phi'(t)$). En déduire, en utilisant le résultat du **a.**, que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)$$
   Calculer, de manière analogue,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}\ .$$