SÉRIES ENTIÈRES

- Bien connaître la définition du rayon de convergence, mais savoir aussi
  - ⋆ Qu'il est souvent utiliser de passer par le critère de d'Alembert. Attention : il faut des modules/valeurs absolues et que les terme ne s'annulent plus au moins à partir d'un certain rang.
  - ⋆ Que certains comportement ne peuvent se produire que sur le cercle de convergence : c'est pratique pour avoir le rayon (exemple : suite bornée mais série divergente ou bien série semi-convergente).
  - ⋆ Qu'il ne faut pas se précipiter sur des considération sur des séries : souvent le caractère borné ou non, ou bien le fait que le terme général tende ou non vers 0 permet de trouver des inégalités sur le rayon de convergence.

    En vrac :
    - Si $(u_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$.
    - Si $(u_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geqslant R$.
    - Si $(u_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leqslant R$.
    - Si $(u_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z| \geqslant R$.
    - Si $\sum u_n z^n$ converge, alors $|z| \leqslant R$.
    - Si $\sum u_n z^n$ diverge, alors $|z| \geqslant R$.
- **À propos de la convergence** : il y a convergence normale (donc uniforme) sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence (et donc au voisinage de chacun de ses points) mais il n'y a pas en général de convergence uniforme sur tout le disque, même ouvert : on a besoin d'une distance de sécurité avec le cercle.

  L'étude de la convergence sur le cercle est en général technique. Parfois le théorème spécial des séries alternées permet d'avoir une convergence uniforme sur des rayons du disque fermé.
- **Propriétés de la somme** : elle est continue sur le disque ouvert de convergence, et (avec une variable réelle) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert.

  On peut, dans cet intervalle ouvert de convergence, dériver et intégrer terme à terme.

  La somme peut se prolonger en certains points du cercle, mais dans ce cas on est ramené à des problèmes du type évoqué ci-dessus.
- **Calcul de la somme d'une série entière** : en général avec les DSE des fonctions usuelles qu'il faut parfaitement connaître, et les opérations : combinaison linéaire, produit (de Cauchy), changement de variable, dérivation, primitivation.

  Penser aussi aux décompositions en éléments simples pour les fractions rationnelles.

  Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, pour calculer la somme des séries entière $\sum P(n)x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$, on décompose P dans la base $(Q_k)_k$ où $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, et pour tout k, $Q_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$, afin de faire apparaître des séries entières dérivées ou primitivées.
- **Calcul d'une somme de série en utilisant une série entière** : Le calcul de la somme de la série $\sum u_n$ (dont on aura préalablement montré la convergence) peut s'envisager de la manière suivante : on définit la série entière $\sum u_n z^n$, dont le rayon de convergence est au moins égal à 1. Si on arrive à calculer sa somme au moyen des fonctions usuelles (cf ci-dessus) sur le disque ouvert de rayon 1, si on arrive à montrer la continuité de la somme en 1, on peut achever le calcul.

- **Développabilité en série entière** : Attention aux fausses idées : être de classe $\mathscr{C}^\infty$ ne suffit pas pour être développable en série entière. Il n'est pas suffisant non plus que sa série de Taylor ait un rayon de convergence non nul.

  MAIS : Si la fonction est développable en série entière, le DSE est nécessairement la série de Taylor.

  On utilise
  - ⋆ Les DSE de fonctions usuelles : combinaisons linéaires, changement de variable, intégration, dérivation, produit de Cauchy, décomposition en éléments simples.
  - ⋆ On peut aussi utiliser une équation différentielle (cf ci-après).
  - ⋆ La majoration du reste dans la formule de Taylor avec reste intégrale, pour essayer de conclure à la convergence (simple suffit) de la série de Taylor vers la fonction. Autrement dit, on cherche à majorer le reste pour montrer qu'il converge simplement vers 0 sur un intervalle $]-R,R[$. Rappelons que l'inégalité de Taylor-Lagrange est une majoration (la plus grossière) du reste intégrale, elle suffit parfois pour conclure mais ce n'est pas toujours le cas.
- **Solutions d'une équation différentielle développable en série entière** :
  1. Supposer (analyse) avoir une fonction DSE avec un rayon $R > 0$.
  2. Traduire le fait qu'elle soit solution de l'équation différentielle.
  3. En déduire ses cœfficients par unicité de ceux-ci (en général, on a une relation de récurrence).
  4. Vérifier qu'effectivement, le rayon est > 0 (synthèse).
  5. Exprimer éventuellement la solution avec les fonctions usuelles.

Exercices vus en cours

1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n!}{n^n} z^n$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} n! z^n$
6. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$
7. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} z^{2n}$
8. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n}$

2 **CCINP 20**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$. (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$. (c) $\sum \cos n z^n$.

3 **CCINP 21**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

4 **Oral Mines** Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$.

5 **Oral X** Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$.

6 **CCINP 15** Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

7 **CCINP 18** On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

8 **CCINP 47** Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

9 **CCINP 23** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

10

1. Déterminer le rayon de convergence R, puis calculer sur $]-R, R[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.
2. Si $n \geqslant 1$, on pose $h_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Déterminer le rayon de convergence r de $\sum\limits_{n\geqslant 1} h_n x^n$ et calculer pour $x \in]-r, r[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h_n x^n$

11 Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est R, si $R \in]0, +\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, montrer que $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R, R]$.

12

1. Montrer que f, prolongement par continuité de $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ en 0, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de Taylor de f a un rayon de convergence infini.
3. Montrer que la fonction f n'est pas développable en série entière.

13 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$.

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

14 En utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$, déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

15 Justifier que Arcsin est développable en série entière et donner son développement.

Même question pour Arccos.

16 **CCINP 51**

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

17 **CCINP 2** On pose $f(x)=\dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$.
   On pose, pour tout $x\in]-R,R[$, $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

18 **CCINP 22**

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f\ :\ x\longmapsto \ln(1+x)+\ln(1-2x)$.
   La série obtenue converge-t-elle pour $x=\dfrac14$? $x=\dfrac12$? $x=-\dfrac12$?

19 **CCINP 32** Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

20 **CCINP 24**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x\mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(0)=1,\quad f(x)=\mathrm{ch}\sqrt{x}\ \text{si}\ x>0,\quad f(x)=\cos\sqrt{-x}\ \text{si}\ x<0\,.$$
   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

21 Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}x^n.$$

22 Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{n}{(n-1)(n+2)}x^n.$$

23 **Une application des séries génératrices** En utilisant des séries entières, déterminer le terme général de la suite de Fibonnaci donnée par $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.

Autres exercices

24 Déterminer les rayons de convergence des séries entières

1. $\sum(\sin n)z^n$
2. $\sum 3^{-n}(1+2/n)^n z^{4n}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)z^n$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\sin n}{n}z^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{ch}\, n}{n}z^n$
6. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}z^n$
7. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dbinom{2n}{n}z^n$
8. $\sum\limits_{n\geqslant 1}n^{\sqrt{n}}z^n$
9. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)z^n$
10. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n z^n$
11. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\cos\left(\dfrac{1}{2^n}\right)z^n$
12. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)z^n$

25
1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière
   $$\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac1n\right)x^n$$
   en la variable réelle x.
2. La série converge-t-elle pour les valeurs R et $-R$ de la variable ?
3. Démontrer que la convergence est uniforme sur le segment $[-R,0]$.
4. Etudier la limite en R (à gauche) de $(R-x)S(x)$ où S désigne la fonction somme de la série entière.

26 Développer en série entière la fonction $t\longmapsto \displaystyle\int_0^t \sin(u^2)\,du$.

27 **Oral CCINP** Montrer, pour tout $t\in[-1,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n}=-\ln(1-t)$.

28 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0. Démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0,1]$. En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\operatorname{Arctan} x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2 \qquad\qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

C'est la manière la plus commode, avec le programme, d'aboutir à la somme de la série harmonique alternée. Il est donc intéressant de savoir faire cette démonstration.

29 **Oral TPE** Ecrire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ sous forme d'une somme de série.

30 Ecrire comme somme d'une série simple l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t\ln(1-t)}{t}dt$ après avoir prouvé son existence.

31 Trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$. On note $f(x)$ sa somme.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\mathrm{d}t$, si $x>0$?.

32 Pour chacune des séries entières suivantes, préciser le rayon de convergence et calculer la somme au moyen des fonctions usuelles.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^3 z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+2}{n!}z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n(n+2)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{(2n)!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\big((3+2(-1)^n\big)^n x^n$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{3n}}{(3n)!}$
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\sin(n\theta)$
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(\sin n)z^n$

Pour l'un d'eux, on pourra utiliser j...

33 **Première question d'un problème des Mines !**

Démontrer que la fonction $x\mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

34 Développer en série entière, si c'est possible, les fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence.

1. $x\longmapsto (1+x)\ln(1+x)$
2. $x\longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$
3. $x\longmapsto \ln(1+x+x^2)$ (une petite astuce permet d'obtenir des calculs simples)
4. $x\longmapsto \operatorname{Arcsin}^2 x$ en utilisant une équation différentielle liant la dérivée et la dérivée seconde.
5. $x\longmapsto \sin^2 x$ sans, quasiment, faire de calculs.

35 **Oral TPE - dénombrement et série génératrice**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit d_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1,\ldots,n\}$ (appelés dérangements). On convient $d_0=1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum\dfrac{d_n x^n}{n!}$ est $\geqslant 1$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, prouver : $n!=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}$.
3. Si x est dans $]-1,1[$, calculer $e^x\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n x^n}{n!}$ et en déduire : $d_n=n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{d_n}{n!}$. Interprétation ?

36 **Transformation d'Abel et théorème d'Abel - voir aussi CCP 2005**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R (on suppose que R est un réel strictement positif). Soit z_0 un nombre complexe de module R, tel que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. On veut démontrer qu'alors la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0,z_0]$.

1. On se place dans le cas où $z_0=R=1$. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $\rho_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k$.
   Soit x un élément du segment $[0,1]$. Pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul p, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k x^k=\rho_n x^{n+1}-\rho_{n+p}x^{n+p}+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}\rho_k x^k(x-1)$ (remarquer que $a_k=\rho_{k-1}-\rho_k$).
   En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k x^k=\rho_n x^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\rho_k x^k(x-1)$
   En déduire la convergence uniforme de $\sum a_n x^n$ sur le segment $[0,1]$.
2. Démontrer que le cas général peut se ramener au cas précédent.
3. Soit θ un élément de $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On rappelle (cela se démontre à l'aide d'une transformation d'Abel) que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}$ converge. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}z^n$. Son rayon de convergence est donc au moins égal à 1. On note ϕ sa somme. Démontrer que, pour tout réel $t\in[0,1[$,
   $$\phi(t)=-\frac{1}{2}\ln\big(1-2t\cos\theta+t^2\big)$$
   (on pourra d'abord calculer $\phi'(t)$). En déduire, en utilisant le résultat du **a.**, que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-\ln\Big(2\Big|\sin\frac{\theta}{2}\Big|\Big)$$
   Calculer, de manière analogue,
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n}.$$