Exercices vus en cours

1 On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

On note w est une fonction continue strictement positive intégrable sur $[a, b]$. Munissons $\mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$ du produit scalaire

$$(f|g) = \int_a^b w(t)f(t)g(t)\ dt$$

Montrer que la famille $(t \mapsto t^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale.

Plus généralement, montrer que toute famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynômes vérifiant, pour tout n, $\deg(e_n) = n$, est totale.

Solution de 1 :

La clé est ici le théorème de Weierstrass. On commence par comparer la norme $\|.\|$ associée au produit scalaire et la norme N_∞ de la convergence uniforme : notant $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$,

$$\forall f \in E \qquad \|f\| \leqslant kN_\infty$$

avec $k = \sqrt{\int_a^b w}$. Il y a par théorème de Weierstrass une suite (P_n) d'éléments de $\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in\mathbf{N}})$ qui converge vers f pour N_∞. A fortiori il y a convergence pour $\|.\|$.

2 **Égalité de Bessel-Parseval** Si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthonormale dans l'espace préhilbertien réel $(E, \langle .\rangle)$, montrer que

$$\forall x \in E \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

puis que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale si et seulement si

$$\forall x \in E \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x\rangle^2 = \|x\|^2$$

Solution de 2 : Égalité de Bessel-Parseval

L'inégalité a été vue (inégalité de Bessel). L'équivalence vient de la simple remarque suivante (voir chapitre sur la projection orthogonale sur un sev de dimension finie) :

$$\|x - p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (e_k|x)^2$$

et de la proposition précédente.

3 Si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale, si $F = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que $F^\perp = \{0_E\}$.

Solution de 3 :

Il suffit de dire que, si $x \in F^\perp$, alors $p_n(x) = 0_E$ pour tout x. Or la suite $(p_n(x))$ converge vers x...

4 **CCINP 78** Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Solution de 4 : CCINP 78

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2, \big(u(x)|u(y)\big) = \big(x|y\big)$.

   (a) Soit $(x,y) \in E^2$.
   On a, d'une part, $\left\|u(x+y)\right\|^2 = \left\|x+y\right\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \left\|y\right\|^2$. (*)
   D'autre part, $\left\|u(x+y)\right\|^2 = \left\|u(x)+u(y)\right\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \left\|u(y)\right\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \left\|y\right\|^2$. (**)

   On en déduit, d'après (*) et (**), que $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
   (b) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$.
   Par hypothèse, $0 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$.
   Donc $x = 0$.
   Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
   Donc u est injectif.
   Puisque E est de dimension finie, on peut conclure que l'endomorphisme u est bijectif.
2. Montrons que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.
   On a $\mathcal{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ en vertu de ce qui précède.
   On a aussi, évidemment, $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$. Donc $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$.
   Soit $(u,v) \in (\mathcal{O}(E))^2$.
   $\forall x \in E, \left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \left\|u(v^{-1}(x))\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.
   Et $\left\|v^{-1}(x)\right\| = \left\|v(v^{-1}(x))\right\| = \|x\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.
   Donc $\forall x \in E, \left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \|x\|$.
   On en déduit, d'après 1.(a), que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$.

   Soit $(i,j) \in \big([\![1,n]\!]\big)^2$.
   $u \in \mathcal{O}(E)$ donc $\big(u(e_i)|u(e_j)\big) = \big(e_i|e_j\big)$.
   Or e est une base orthonormée de E donc $\big(e_i|e_j\big) = \delta_i^j$ où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.
   On en déduit que $\forall (i,j) \in \big([\![1,n]\!]\big)^2, \big(u(e_i)|u(e_j)\big) = \delta_i^j$.
   C'est-à-dire $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une famille orthonormée de E.
   Donc, c'est une famille libre à n éléments de E avec $\dim E = n$.
   Donc $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.
   Réciproquement, supposons que $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$.

Comme e est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$||x||^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \left(e_i | e_j\right)$.

Or e est une base orthonormée de E donc $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (*)

De même, par linéarité de u, $||u(x)||^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) | \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \left(u(e_i) | u(e_j)\right)$.

Or $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E, donc $||u(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. (**)

D'après (*) et (**), $\forall\, x \in E$, $||u(x)|| = ||x||$.

Donc, d'après 1.(a), $u \in \mathcal{O}(E)$.

5 Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est compact.

6 Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}.$$

Solution de 6 :

$(C_1|C_2) = \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 - \sqrt{2}/2\sqrt{3}/3 = 0$.

$(C_2|C_3) = -\sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 + \sqrt{3}/3\sqrt{6}/3 - \sqrt{3}/3\sqrt{6}/6 = 0$.

$(C_1|C_3) = -\sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 + \sqrt{2}/2\sqrt{6}/6 = 0$.

$\|C_1\|^2 = \left(\sqrt{2}/2\right)^2 + \left(\sqrt{2}/2\right)^2 = 1/2 + 1/2 = 1$.

$\|C_2\|^2 = \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 + \left(\sqrt{3}/3\right)^2 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$.

$\|C_3\|^2 = \left(\sqrt{6}/6\right)^2 + \left(\sqrt{6}/3\right)^2 + \left(\sqrt{6}/6\right)^2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1$.

Donc $M \in \mathcal{O}(3)$.

7 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D : x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

8 **CCINP 68** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.

2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Solution de 8 : CCINP 68

1. (a) La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   (b) On obtient $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^2(\lambda - 3)$.
   $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_0(A) : x - y + z = 0$.
   Donc A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (c) $\text{rg} A = 1$ donc $\dim E_0(A) = 2$.
   On en déduit que 0 est valeur propre au moins double de la matrice A.
   Puisque $\text{tr} A = 3$ et que $\text{tr} A$ est la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leur multiplicité, la matrice A admet une troisième valeur propre qui vaut 3 et qui est nécessairement simple.
   Comme dans la question précédente, on peut conclure que A est diagonalisable car $\dim E_3(A) + \dim E_0(A) = 3$.
   (d) On obtient $A^2 = 3A$ donc A est diagonalisable car cette matrice annule le polynôme $X^2 - 3X$ qui est scindé à racines simples.
2. On note $e = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On note $(\,|\,)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
   Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A.
   A est symétrique réelle et e est une base orthonormée, donc f est un endomorphisme symétrique et, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.
   On sait également que les sous-espaces propres sont orthogonaux donc il suffit de trouver une base orthonormée de chaque sous-espace propre pour construire une base orthonormée de vecteurs propres.

   $E_3(f) = \text{Vect}(1, -1, 1)$ et $E_0(f) : x - y + z = 0$.
   Donc $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ est une base orthonormée de $E_3(f)$.
   $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ sont deux vecteurs orthogonaux de $E_0(f)$.
   On les normalise et on pose $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\right)$.
   Alors $(\vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée de $E_0(f)$.
   On en déduit que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de vecteurs propres de f.

Autres exercices

9 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E euclidien. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est une symétrie orthogonale.
2. f est une isométrie et est symétrique (ie $f \in \mathscr{O}(E) \cap \mathscr{S}(E)$.)
3. f est une symétrie et une isométrie.
4. f est une symétrie et est symétrique.

Donner une traduction matricielle.

10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\operatorname{Ker}(A^\top A) = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{rg}(A^\top A) = \operatorname{rg} A$.

11 **Linéarité automatique**

1. Montrer qu'une application de E euclidien dans lui-même qui conserve le produit scalaire est automatiquement linéaire (et donc une isométrie de E).
2. Même question si $u(0_E) = 0_E$ et u conserve la distance euclidienne entre deux vecteurs (donc en particulier la norme).
3. Vérifier que plus généralement, si u conserve la distance euclidienne, il existe un vecteur $a \in E$ et une application $v \in \mathscr{L}(E)$ tels que pour tout x, $u(x) = a + v(x)$ (on dit que u est une application affine).
4. Montrer que si e est un vecteur de norme 1, $u : x \mapsto \|x\|\, e$ conserve la norme sans être linéaire.

Solution de 11 : Linéarité automatique

Si u conserve le produit scalaire (donc la norme) :

$$\begin{aligned}\left\| u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y) \right\| š &= \left\| u(x+\lambda y)\right\|^2 + \|u(x)\|^2 + \lambda^2 \left\| u(y)\right\|^2 - 2(u(x+\lambda y)|u(x)) \\ &\quad - 2\lambda(u(x+\lambda y)|u(y)) + 2\lambda(u(x)|u(y)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Si u conserve les distances, comme

$$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\|u(x)\| š + \left\|u(y)\right\| š - \left\|u(x) - u(y))\right\|^2\right),$$

u conserve le produit scalaire.

12 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{O}(n)$.

1. En utilisant le vecteur $u \in \mathbb{R}^{n^2}$ qui ne contient que des 1, montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left|a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{n}$.
2. Montrer ensuite que $\displaystyle\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$ en utilisant $U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
   Cas d'égalité ?

Solution de 12 :

1.
2. Savoir que AU est une matrice colonne dont les coefficients sont les sommes des coefficients de chaque ligne de A aide à trouver

$$U^\top\ A\ U = \sum_{i,j} a_{i,j}$$

Mais considérons le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$; on peut alors interpréter

$${}^\top U\ A\ U = \langle U, AU \rangle$$

Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle U, AU\rangle| \leqslant \|U\|\,\|AU\|$$

Mais A, orthogonale, conserve la norme euclidienne. Comme $\|U\| = \sqrt{n}$, l'inégalité est démontrée (assez facile avec l'indication, mais sans ladite indication ce le serait nettement moins). L'égalité dans Cauchy-Schwarz a lieu si et seulement si AU et U sont liés, soit si et seulement si $AU = \pm U$ (A conserve la norme). Soit si et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1 (respectivement -1).

13 Déterminer

1. $|(\mathcal{O}(n)\cap\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))|$, **2.** $\mathcal{O}(n)\cap\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$, **3.** $\mathcal{O}(n)\cap\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ pour $n\in\{2,3\}$.

14 Reconnaître les endomorphismes dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j) d'un espace vectoriel euclidien orienté est

$$M=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}\qquad N=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$$

15 Reconnaître les endomorphismes dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j,k) d'un espace vectoriel euclidien orienté est

$$A=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}7&4&4\\-4&8&-1\\4&1&-8\end{pmatrix}\qquad B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&4&-8\\4&7&4\\-8&4&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}\qquad E=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}\qquad F=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&6&-3\\6&3&2\\-3&2&6\end{pmatrix}$$

16 Soit $A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6&3&\cdot\\-3&2&\cdot\\2&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ et $f\in\mathcal{L}(E)$ où E euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans la base orthonormale directe (i,j,k) est A.

Compléter la matrice pour que $A\in\mathcal{SO}(3)$ puis déterminer ses éléments caractéristiques.

17 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$.

1. Trouver une CNS sur (a,b) pour que A soit orthogonale.
2. Cette condition étant remplie, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien orienté dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j,k) est A.

18 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, et $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E. Former la matrice dans $\mathscr{B}$ de la rotation R d'axe orienté par $w = \frac{1}{3}(2i - 2j - k)$ et d'angle $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$.

19 Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on considère des rotations r et R.

1. Étudier l'endomorphisme $f = r \circ R \circ r^{-1}$.
2. Dans quels cas r et R commutent-elles ?

20 **Écrit CCINP 2020 - CCMP 2017** Soit E euclidien et f un endomorphisme non nul de E qui conserve l'orthogonalité.

1. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$, alors $\|f(x)\| = \|f(y)\|$.

Indication : faire un dessin, qui incite à s'intéresser à $x - y$ et $x + y$.

2. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout x de E, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

3. Montrer que f est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

21 Soit E euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et $v = u - \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, v)^{\perp}$.

2. Soit p projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\, v$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id} + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}\right).$$

Démontrer que pour tout $x \in E$, $p_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x)$.

Solution de 21 :

1. Considérons $x \in \ker v$, $y \in \mathrm{im}\, v$. Il existe z tel que $y = v(z)$. Et

$$(x|y) = (x|v(z)) = (x|z) - (x|u(z))$$

Mais $x = u(x)$, donc $(x|u(z)) = (u(x)|u(z))$ et u conserve le produit scalaire ; on conclut bien que

$$(x|y) = 0$$

Il en ressort que $\ker v \perp \mathrm{im}\, v$. Donc $\ker v \subset (\mathrm{im}\, v)^{\perp}$. L'égalité résulte alors de l'égalité des dimensions, elle-même conséquence du théorème du rang.

2. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = y + z$ où $y \in \mathrm{Ker}\, v$, c'est-à-dire $y = u(y)$, et $z \in (\mathrm{Ker}\, v)^{\perp} = \mathrm{im}(v)$, ce qui signifie qu'il existe $t \in E$ tel que $z = v(t) = t - u(t)$. On a alors

$$p_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) \; + \; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(z)$$

Mais pour tout k on a $u^k(y) = y$ (récurrence sur k), et $u^k(z) = u^k(t) - u^{k+1}(t)$ ce qui fait que la deuxième somme est télescopique. Donc

$$p_n(x) = y + \frac{1}{n}\left(t - u^n(t)\right)$$

Mais par orthogonalité de u, on a $\|u^n(t)\| = \|t\|$, donc

$$p_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$$

ce qui conclut.

22

1. À quelle condition une rotation et une réflexion du plan euclidien orienté commutent-elles ?
2. Étudier en général $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$ où r est une rotation et s une réflexion.

23 Mines MP (sans l'indication)

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n)$ où A et D sont carrées. En multipliant par une matrice triangulaire par blocs bien choisie, montrer que $(\det A)^2 = (\det D)^2$.

24 Mines MP

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire sur σ et S pour que $M \in \mathcal{O}(3)$.

2. Donner une condition nécessaire sur σ et S pour que $M \in \mathcal{SO}(3)$.

3. Montrer que $M \in \mathcal{SO}(3)$ si et seulement si a, b et c sont racines de $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0, 4/27]$.

Solution de 24 : Mines MP

1. $M \in \mathcal{O}(3) \Longleftrightarrow \sigma = 0$ et $S \in \{-1, 1\}$.

2. $M \in \mathcal{SO}(3) \Longleftrightarrow \sigma = 0$ et $S = 1$.

3. Étudier la fonction.

25 Déterminer toutes les matrices symétriques réelles vérifiant $A^4 = -A^2$.

26 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.
2. Si A est symétrique, écrire $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A.
3. Si $Q \in \mathcal{O}(n)$, calculer $\|Q\|$.

Solution de 26 :

1.
2. Par théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D \in D_n(\mathbf{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$. Mais alors

$$\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\left(A^T A\right) = \mathrm{Tr}\left(PDP^T PDP^T\right) = \mathrm{Tr}(D^2)$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées autant que de fois que leur multiplicité. Alors

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

3.

$$\|Q\|^2 = \mathrm{Tr}\left(Q^T Q\right) = \mathrm{Tr}\left(I_n\right) = n$$

Donc $\|Q\| = \sqrt{n}$. On retrouve que $O(n)$ est borné. Même mieux, pour cette norme, $O(n)$ est inclus dans une sphère.

27 Soit A nilpotente commutant avec sa transposée. Montrer que $A^\top A = 0$ puis que A est nulle.

28 **Matrice symétrique positive ou définie positive** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est **positive** lorsque $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathbb{R}^+$ et on note $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
On dit que A est **définie positive** lorsque $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathbb{R}_*^+$ et on note $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\;X^\top A X \geqslant 0$ (respectivement > 0).
2. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^\top M$.

3. **Racine carrée** : Si A est symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$. Que dire de B si A est supposée définie positive ?
4. **Décomposition polaire** : Soit $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\intercal A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe $(Q, S) \in \mathscr{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.
Remarque : la densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la compacité de $\mathscr{O}(n)$ (à savoir montrer...) permet d'étendre ce résultat à toute matrice carrée réelle.

Solution de 28 : Matrice symétrique positive ou définie positive

1. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Par théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ et D diagonale dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que
$$M = PDP^{-1} = PDP^T$$
Alors
$$\begin{aligned} \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\ M\ X\ \geqslant\ 0 &\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad X^T\ PDP^T\ X\ \geqslant\ 0 \\ &\Leftrightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad Y^T DY\ \geqslant\ 0 \end{aligned}$$
car l'application $X \mapsto P^T X$ est une bijection de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans lui-même (un automorphisme, même), de réciproque $Y \mapsto PY$. Or, avec des notations « évidentes »,
$$Y^T DY = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$
et $\mathrm{Sp}(M) = \{d_i\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Si tous les d_i sont positifs, alors $\forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad Y^T DY\ \geqslant\ 0$, et réciproquement, en prenant les Y dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Pour la défini-positivité, c'est quasiment la même preuve que pour la caractérisation de la positivité, quelques inégalités strictes à la place d'inégalités larges, seulement.
2. $M = \Delta P^\intercal$ où Δ comme ci-dessous convient.
3. **Racine carrée** : Par théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}(n)$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbf{R})$ (i.e. diagonale) telles que
$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$
Et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (notation non officielle...) où les λ_i sont les valeurs propres de$D$, donc de A. Donc les λ_i sont positifs, et, en posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^T$ on obtient une matrice symétrique (deuxième forme) et à valeurs propres positives (première forme) telle que $B^2 = A$.
Si A est définie positive, elle est dans $GL_n(\mathbf{R})$ (elle n'a pas 0 pour valeur propre), donc B aussi (prendre le déterminant, ou encore dire que $A^{-1}BB = I_n$), donc B, étant déjà positive, est définie positive.
4. **Décomposition polaire** : $A^\intercal A$ est assez facilement une matrice symétrique. Et, si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,
$$X^\intercal (A^\intercal A) X = Y^\intercal Y \qquad \text{où } Y = AX$$
Or, si $X \neq (0)$, $AX \neq (0)$, or si $Y \neq (0)$, $Y^\intercal Y > 0$.
En utilisant les questions précédentes, il existe S symétrique définie positive telle que
$$S^2 = A^T A$$
Posons $Q = AS^{-1}$; on calcule
$$Q^T Q = (S^{-1})^T A^T A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n$$
Donc Q est orthogonale.

Questions bonus :

1. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques positives est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\phi_X : M \mapsto X^T M X$ est continue car linéaire avec un espace de départ ($\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) de dimension finie. De même $\psi : M \mapsto M - M^T$. Or l'ensemble des matrices positives est

$$\psi^{-1}(\{(0)\}) \cap \bigcap_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \phi_X^{-1}(\{0\})$$

et une intersection de fermés est un fermé.
On peut aussi utiliser la caractérisation des fermés par les suites.

2. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$M - \frac{1}{p} I_n \xrightarrow[p \to +\infty]{} M$$

Or, au moins à partir d'un certain rang, $1/p \notin \mathrm{Sp}(M)$.

---

3. Montrer que $O(n)$ est compact.

Fermé et borné... n'oublions surtout pas : d'un espace vectoriel de dimension finie.

---

4. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe un couple (Q, S) de matrices, la première orthogonale et la seconde symétrique positive, telles que $A = QS$.

Soit (A_p) une suite d'éléments de $GL_n(\mathbf{R})$ qui converge vers A. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, il existe Q_p orthogonale et S_p symétrique positive telles que

$$A_p = Q_p S_p$$

On extrait de (Q_p), par compacité, une suite $\left(Q_{\phi(p)}\right)$ qui converge vers Q orthogonale. Et en écrivant

$$S_{\phi(p)} = Q_{\phi(p)}^T A_{\phi(p)}$$

On voit que la suite $\left(S_{\phi(p)}\right)$ converge vers $Q^T A$. Par **3.**, $Q^T A = S$ est symétrique positive. Ce qui conclut.

29 **Formules variationnelles** Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que l'application

$$x \longmapsto \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$$

atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum, les exprimer en fonction des valeurs propres de u.

Traduire ce résultat matriciellement.

Solution de 29 : Formules variationnelles

Par théorème spectral, on fixe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E composée de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i$. Il n'est pas restrictif de supposer $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$. Et alors, si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, on a

$$(x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

donc

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant (x|u(x)) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

l'inégalité de gauche est une égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E$, l'inégalité de droite est une égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_n \mathrm{Id}_E$. Donc il y a un minimum et un maximum, qui sont $\mathrm{Min}\big(\mathrm{Sp}(A)\big)$ et $\mathrm{Max}\big(\mathrm{Sp}(A)\big)$. Pour les matrices symétriques réelles, même chose en considérant le quotient

$$\frac{X^T\ A\ X}{X^T\ X}$$

X parcourant $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}$.

30 **Adjoint** Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien, $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, et on note u^* l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^*) = A^\intercal$.

1. Montrer que u^* est l'unique endomorphisme de E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = \big(x|u^*(y)\big)$$

2. Déterminer le noyau et l'image de u^* en fonction du noyau et de l'image de u.
3. Si $u \in \mathscr{S}(E)$, que vaut u^* ?
4. Si $u \in \mathscr{O}(E)$, que vaut u^* ?
5. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.

Solution de 30 : Adjoint

1. En effet, si on a un endomorphisme v,
   $\forall (x, y) \in E^2 \ \big(u(x)|y\big) = \big(x|v(y)\big)$
   ssi pour tout $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\intercal A^\intercal Y = XBY$ où B matrice de v dans $\mathscr{B}$
   ssi pour tout $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\intercal(A^\intercal - B)Y = 0$
   ssi $B = A^\intercal$ en prenant pour X et Y les vecteurs de la base canonique ou en reconnaissant $|X, (A^\intercal - B)Y|$...
2. $y \in \mathrm{Ker}\, u^*$ ssi $u^*(y) \in E^\perp$ ssi pour tout $x \in E$, $(u(x)|y) = 0$ ssi $y \in (\mathrm{Im}\, u)^\perp$
   Donc $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$.
   En remarquant avec la définition que $(u^*)^* = u$, $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.
3. Si $u \in \mathscr{S}(E)$, $u^* = u$ par unicité.
4. Si $u \in \mathscr{O}(E)$, $u^* = u^{-1}$ vu en remarque dans le cours.
5. Si F est stable par u, et si $y \in F^\perp$, alors pour tout $x \in F$, $(u^*(y)|x) = (y|u(x)) = 0$ donc $u^*(y) \in F^\perp$.
   On en déduit l'autre implication avec $(u^*)^* = u$.

31 **Connexité par arcs de $\mathscr{S}\mathscr{O}(n)$**

1. Définir une application continue ϕ de $[0, 1]$ dans $\mathscr{S}\mathscr{O}(2)$ telle que $\phi(0) = I_2$ et $\phi(1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. On considère $M \in \mathscr{S}\mathscr{O}(n)$ $(n \geqslant 2)$. En utilisant la réduction des isométries vectorielles, montrer que $\mathscr{S}\mathscr{O}(n)$ est connexe par arcs.
3. Montrer que, si $M \in \mathscr{S}\mathscr{O}(n)$ et $M' \in \mathscr{O}(n) \setminus \mathscr{S}\mathscr{O}(n)$, il n'existe pas d'application ψ continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathscr{O}(n)$, telle que $\psi(0) = M$ et $\psi(1) = M'$.