ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

- L'outil principal pour l'étude des endomorphismes symétriques (ou matrices symétriques) est le théorème spectral.
- Si A matrice de u dans la base orthonormale des e_i, alors $a_{i,j} = (e_i|u(e_j))$.
- Les projections orthogonales sont les projections qui sont symétriques, les symétries orthogonales sont les symétries qui sont orthogonales (symétries isométriques) ou encore les symétries symétriques, ou encore les isométries symétriques voir exercice .
- Pour étudier les isométries en petite dimension :
  - ⋆ Dans le plan, c'est simple : il n'y a que des rotations et des réflexions. Il suffit de vérifier que la matrice en base orthonormale est orthogonale et de trouver son déterminant. Il faut savoir trouver l'angle d'une rotation et l'axe d'une réflexion (ce sont les vecteurs invariants).
  - ⋆ En dimension 3, on montre que la matrice est orthogonale avec l'orthonormalité de vecteurs colonnes C_1, C_2 et C_3 (ou lignes). On détermine le signe de l'isométrie avec un déterminant ou plus simplement en comparant une coordonnée de $C_1 \wedge C_2$ à la coordonnée correspondante de C_3 : si c'est le même signe, il s'agit d'une rotation, sinon c'est une isométrie négative.
  - ⋆ Pour étudier une rotation en dimension 3, on cherche un vecteur directeur a de son axe en recherchant les vecteurs invariants. Puis l'angle θ est donné par $\mathrm{tr}(r) = 2\cos\theta + 1$ et le signe de $\sin\theta$ est celui de $[u, r(u), a]$ où u n'est pas invariant (souvent un vecteur de la base canonique).

Exercices vus en cours

1 On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

On note w est une fonction continue strictement positive intégrable sur $[a, b]$. Munissons $\mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$ du produit scalaire

$$(f|g) = \int_a^b w(t)f(t)g(t)\ dt$$

Montrer que la famille $(t \mapsto t^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale.

Plus généralement, montrer que toute famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynômes vérifiant, pour tout n, $\deg(e_n) = n$, est totale.

2 **Égalité de Bessel-Parseval** Si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthonormale dans l'espace préhilbertien réel $(E, \langle . \rangle)$, montrer que

$$\forall x \in E \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

puis que $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale si et seulement si

$$\forall x \in E \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x\rangle^2 = \|x\|^2$$

3 Si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale, si $F = \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que $F^\perp = \{0_E\}$.

4 **CCINP 78** Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathscr{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

5 Montrer que $\mathscr{O}(n)$ est compact.

6 Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}.$$

7 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D : x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

8 **CCINP 68** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul,
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
   (c) en utilisant le rang de la matrice,
   (d) en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Autres exercices

9 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E euclidien. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est une symétrie orthogonale.
2. f est une isométrie et est symétrique (ie $f \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{S}(E)$.)
3. f est une symétrie et une isométrie.
4. f est une symétrie et est symétrique.

Donner une traduction matricielle.

10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\operatorname{Ker}(A^\intercal A) = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{rg}(A^\intercal A) = \operatorname{rg} A$.

11 **Linéarité automatique**

1. Montrer qu'une application de E euclidien dans lui-même qui conserve le produit scalaire est automatiquement linéaire (et donc une isométrie de E).
2. Même question si $u(0_E) = 0_E$ et u conserve la distance euclidienne entre deux vecteurs (donc en particulier la norme).
3. Vérifier que plus généralement, si u conserve la distance euclidienne, il existe un vecteur $a \in E$ et une application $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que pour tout x, $u(x) = a + v(x)$ (on dit que u est une application affine).
4. Montrer que si e est un vecteur de norme 1, $u : x \mapsto \|x\|\, e$ conserve la norme sans être linéaire.

12 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{O}(n)$.

1. En utilisant le vecteur $u \in \mathbb{R}^{n^2}$ qui ne contient que des 1, montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.
2. Montrer ensuite que $\left|\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$ en utilisant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.
   Cas d'égalité ?

13 Déterminer

1. $|(\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))|$,
2. $\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$,
3. $\mathcal{O}(n) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ pour $n \in \{2,3\}$.

14 Reconnaître les endomorphismes dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j) d'un espace vectoriel euclidien orienté est

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad N = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

15 Reconnaître les endomorphismes dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j,k) d'un espace vectoriel euclidien orienté est

$$A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

16 Soit $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & \cdot \\ -3 & 2 & \cdot \\ 2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ où E euclidien orienté de dimension 3 dont la matrice dans la base orthonormale directe (i,j,k) est A.
Compléter la matrice pour que $A \in \mathcal{SO}(3)$ puis déterminer ses éléments caractéristiques.

17 Soient $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Trouver une CNS sur (a,b) pour que A soit orthogonale.
2. Cette condition étant remplie, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien orienté dont la matrice dans une base orthonormée directe (i,j,k) est A.

18 Soit E un espace vectoriel euclidien orienté, et $\mathcal{B} = (i,j,k)$ une base orthonormée directe de E. Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation R d'axe orienté par $w = \frac{1}{3}(2i - 2j - k)$ et d'angle $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$.

19 Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, on considère des rotations r et R.

1. Étudier l'endomorphisme $f = r \circ R \circ r^{-1}$.
2. Dans quels cas r et R commutent-elles ?

20 **Écrit CCINP 2020 - CCMP 2017** Soit E euclidien et f un endomorphisme non nul de E qui conserve l'orthogonalité.

1. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$, alors $\|f(x)\| = \|f(y)\|$.

   Indication : faire un dessin, qui incite à s'intéresser à $x - y$ et $x + y$.
2. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout x de E, $\|f(x)\| = k\|x\|$.
3. Montrer que f est la composée d'une isométrie et d'une homothétie.

21 Soit E euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et $v = u - \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} v = (\operatorname{Ker} v)^{\perp}$.

2. Soit p projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} v$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id} + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}\right).$$

Démontrer que pour tout $x \in E$, $p_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x)$.

22

1. À quelle condition une rotation et une réflexion du plan euclidien orienté commutent-elles ?
2. Étudier en général $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$ où r est une rotation et s une réflexion.

23 **Mines MP (sans l'indication)**

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(n)$ où A et D sont carrées. En multipliant par une matrice triangulaire par blocs bien choisie, montrer que $(\det A)^2 = (\det D)^2$.

24 **Mines MP**

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma = ab + bc + ca$, $S = a + b + c$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire sur σ et S pour que $M \in \mathcal{O}(3)$.

2. Donner une condition nécessaire sur σ et S pour que $M \in \mathcal{SO}(3)$.

3. Montrer que $M \in \mathcal{SO}(3)$ si et seulement si a, b et c sont racines de $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0, 4/27]$.

25 Déterminer toutes les matrices symétriques réelles vérifiant $A^4 = -A^2$.

26 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.
2. Si A est symétrique, écrire $\|A\|$ en fonction des valeurs propres de A.
3. Si $Q \in \mathcal{O}(n)$, calculer $\|Q\|$.

27 Soit A nilpotente commutant avec sa transposée. Montrer que $A^{\top}A = 0$ puis que A est nulle.

28 **Matrice symétrique positive ou définie positive** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est **positive** lorsque $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}^+$ et on note $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
On dit que A est **définie positive** lorsque $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_*^+$ et on note $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^{\top}AX \geqslant 0$ (respectivement > 0).
2. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^{\top}M$.
3. **Racine carrée** : Si A est symétrique positive, montrer qu'il existe B symétrique positive telle que $B^2 = A$.
   Que dire de B si A est supposée définie positive ?
4. **Décomposition polaire** : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{\top}A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe $(Q,S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.
   Remarque : la densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la compacité de $\mathcal{O}(n)$ (à savoir montrer...) permet d'étendre ce résultat à toute matrice carrée réelle.

29 **Formules variationnelles** Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que l'application

$$x \longmapsto \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$$

atteint sur $E \setminus \{0_E\}$ un minimum et un maximum, les exprimer en fonction des valeurs propres de u.

Traduire ce résultat matriciellement.

30 **Adjoint** Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, u un endomorphisme de E. On note $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, et on note u^* l'endomorphisme de E tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = A^{\top}$.

1. Montrer que u^* est l'unique endomorphisme de E tel que
$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = \big(x|u^*(y)\big)$$
2. Déterminer le noyau et l'image de u^* en fonction du noyau et de l'image de u.
3. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, que vaut u^* ?
4. Si $u \in \mathcal{O}(E)$, que vaut u^* ?
5. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F est stable par u si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par u^*.

31 **Connexité par arcs de $\mathcal{SO}(n)$**

1. Définir une application continue ϕ de $[0,1]$ dans $\mathcal{SO}(2)$ telle que $\phi(0) = I_2$ et $\phi(1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. On considère $M \in \mathcal{SO}(n)$ $(n \geqslant 2)$. En utilisant la réduction des isométries vectorielles, montrer que $\mathcal{SO}(n)$ est connexe par arcs.
3. Montrer que, si $M \in \mathcal{SO}(n)$ et $M' \in \mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{SO}(n)$, il n'existe pas d'application ψ continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathcal{O}(n)$, telle que $\psi(0) = M$ et $\psi(1) = M'$.