Espaces préhilbertiens réels

Exercices vus en cours

1 Montrer qu'on définit sur $\mathbb{R}[X]$ un produit scalaire en posant $(P|Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, et en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.

2 Définir sur $\mathbb{R}_n[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$, un produit scalaire rendant la base canonique orthonormale.

3 Si I est un intervalle et $L^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable, montrer que $L^2(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $\left(f|g\right) = \int_I fg$ définit un produit scalaire sur $L^2(I)$.

4 **CCINP 76** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Solution de 4 : CCINP 76

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$, $|\left(x|y\right)| \leqslant ||x||\,||y||$
   Preuve :
   Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = ||x+\lambda y||^2$.

   On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geqslant 0$.
   De plus, $P(\lambda) = \left(x+\lambda y|x+\lambda y\right)$.
   Donc, par bilinéarité et symétrie de $(\,|\,)$, $P(\lambda) = ||y||^2\lambda^2 + 2\lambda\left(x|y\right) + ||x||^2$.
   On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $||y||^2 \neq 0$.
   Premier cas : si $y = 0$
   Alors $|\left(x|y\right)| = 0$ et $||x||\,||y|| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
   Deuxième cas : $y \neq 0$
   Alors $||y|| = \sqrt{(y|y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(\,|\,)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
   On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
   Or $\Delta = \left(x|y\right)^2 - ||x||^2||y||^2$ donc $\left(x|y\right)^2 \leqslant ||x||^2||y||^2$.
   Et donc, $|\left(x|y\right)| \leqslant ||x||\,||y||$.

   (b) On reprend les notations de 1. .
   Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2$, $|\left(x|y\right)| = ||x||\,||y|| \iff x$ et y sont colinéaires.
   Supposons que $|\left(x|y\right)| = ||x||\,||y||$.

   Premier cas : si $y = 0$

Alors x et y sont colinéaires.
Deuxième cas : si $y \neq 0$
Alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(|)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
Donc x et y sont colinéaires.
Supposons que x et y soient colinéaires.

Alors $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
$|\left(x|y\right)| = |\alpha|.|\left(y|y\right)| = |\alpha|\,||y||^2$ et $||x||\,||y|| = \sqrt{(x|x)}\,||y|| = \sqrt{\alpha^2(y|y)}||y|| = |\alpha|.||y||^2$.
Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ défini par :
   $\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
   On pose $A = \left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E \right\}$.
   $A \subset \mathbb{R}$.
   $A \neq \varnothing$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).
   De plus, $\forall f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0.
   On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.

   Soit $f \in E$.
   On considère la quantité $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t \right)^2$.
   D'une part, $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t \right)^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t \right)^2 = (b-a)^2$.
   D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(|)$ on obtient :
   $\left(\displaystyle\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t \right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.
   On en déduit que $\forall f \in E$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.

   Donc $m \geqslant (b-a)^2$.
   Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
   Donc $m = (b-a)^2$.

5 **CCINP 79** Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\, (f,g) \in E^2$, $\left(f|g\right) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de 5 : CCINP 79

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.

   On pose $\forall\, x \in [a,b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)\,dt$.
   h est continue sur $[a,b]$ donc F est dérivable sur $[a,b]$.
   De plus, $\forall\, x \in [a,b]$, $F'(x) = h(x)$.
   Or h est positive sur $[a,b]$ donc F est croissante sur $[a,b]$. (*)
   Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)
   D'après (*) et (**), F est constante sur $[a,b]$.

   Donc $\forall\, x \in [a,b]$, $F'(x) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in [a,b]$, $h(x) = 0$.

2. On pose $\forall\,(f,g) \in E^2$, $\left(f|g\right) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.
   On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)
   Soit $f \in E$. $\left(f|f\right) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

   Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[a,b]$ et $a < b$ donc $\left(f|f\right) \geqslant 0$.
   Donc $(|)$ est positive. (**)
   Soit $f \in E$ telle que $\left(f|f\right) = 0$.

   Alors $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.
   Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[a,b]$.
   Donc, d'après 1., f est nulle sur $[a,b]$.
   Donc $(|)$ est définie. (***)
   D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

6 Orthonormaliser la base $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Solution de 6 :

On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0,1,1)$.

Puis on cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ avec λ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1|\mathrm{e}_2) + \lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

En cherchant $\varepsilon_3 = e_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2$ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\dfrac{1}{2}$ et $\nu = -\dfrac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\epsilon'_1 = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\epsilon'_2 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\epsilon'_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

7 Dans $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$ en utilisant le théorème de Weierstraß.
2. En déduire que $F \subsetneq \left(F^\perp\right)^\perp = E$.
3. Soit $G = \{t \mapsto P(t)\sin(t)\ ;\ P \in F\}$. Montrer que $G^\perp = \{0\}$ et en déduire que $(F\cap G)^\perp \supsetneq F^\perp + G^\perp$.
4. Montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Que vaut $\mathrm{d}(\exp, F)$? Est-elle atteinte ?
5. Montrer plus généralement que si $\mathrm{d}(f,F)$ est atteinte pour un $g \in F$, alors $f - g \in F^\perp$. Pour quelles fonctions est-ce le cas ?

8 **CCINP 39** On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.
   On pose alors $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
   On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Solution de 8 : CCINP 39

1. (a) Soit $(x,y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n y_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x_n^2 + y_n^2\right)$.
   Or $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum x_n y_n$ converge absolument, donc converge.

   (b) La suite nulle appartient à l^2.
   Soit $(x,y) \in \left(l^2\right)^2$ avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Montrons que $z = x + \lambda y \in l^2$.

   On a $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n^2 = (x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$. (1)
   Par hypothèse, $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent et d'après 1.(a), $\sum x_n y_n$ converge.
   Donc, d'après (1), $\sum z_n^2$ converge.
   Donc $z \in l^2$.

   On en déduit que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

2. Soit $(x, y) \in l^2$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On pose $z = x + \lambda y$ avec $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + \lambda y_n$.
   Ainsi, $\varphi(x+\lambda y) = \varphi(z) = z_p = x_p + \lambda y_p = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$.
   Donc φ est linéaire sur l^2. (*)
   $\forall\, x = (x_n) \in l^2$, $|x_p|^2 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n^2$, donc $|x_p| \leqslant ||x||$.

   Donc $\forall\, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, $|\varphi(x)| = |x_p| \leqslant ||x||$ (**)
   D'après (*) et (**), φ est continue sur l^2.

3. Analyse :
   Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\perp}$.
   Alors $\forall\, y \in F$, $(x|y) = 0$.
   Soit $p \in \mathbb{N}$.
   On considère la suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F définie par :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   $y \in F$, donc $(x|y) = 0$, donc $x_p = 0$.
   On en déduit que, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $x_p = 0$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Synthèse :

   la suite nulle appartient bien à $F^{\perp}$.
   Conclusion : $F^{\perp} = \{0\}$.

   Ainsi, $(F^{\perp})^{\perp} = l^2$.

   On constate alors que $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$.

9 **CCINP 77** Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Solution de 9 : CCINP 77

1. On a $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. (*)
   En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^{\perp}, (x \mid y) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall\, x \in A$, $x \in (A^{\perp})^{\perp}$.
   Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^{\perp}$ donc $\dim A = n - \dim A^{\perp}$.

   De même, $E = A^{\perp} \oplus \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ donc $\dim\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim A^{\perp}$.
   Donc $\dim\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \dim A$. (**)
   D'après (*) et (**), $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.

2. (a) Procédons par double inclusion.
Prouvons que $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.

Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Soit $y \in F+G$.
Alors $\exists (f,g) \in F \times G$ tel que $y = f+g$.
$(x \mid y) = \underbrace{(x \mid f)}_{\substack{=0 \\ \text{car } f \in F \text{ et } x \in F^{\perp}}} + \underbrace{(x \mid g)}_{\substack{=0 \\ \text{car } g \in G \text{ et } x \in G^{\perp}}} = 0.$
Donc $\forall\, y \in (F+G)$, $(x \mid y) = 0$.
Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.
Prouvons que $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Soit $x \in (F+G)^{\perp}$.
$\forall\, y \in F$, on a $(x \mid y) = 0$ car $y \in F \subset F+G$.
Donc $x \in F^{\perp}$.
De même, $\forall\, z \in G$, on a $(x \mid z) = 0$ car $z \in G \subset F+G$.
Donc $x \in G^{\perp}$.
On en déduit que $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Finalement, par double inclusion, $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

(b) D'après 2.(a), appliquée à $F^{\perp}$ et à $G^{\perp}$, on a $\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp} = \left(F^{\perp}\right)^{\perp} \cap \left(G^{\perp}\right)^{\perp}$.

Donc, d'après 1., $\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp} = F \cap G$.
Donc $\left(\left(F^{\perp}+G^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.
C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

10 $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

11 **CCINP 92** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\, ,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^{\perp}$.

Solution de 11 : CCINP 92

1. $\langle\, ,\rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E.
De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
$\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}({}^t\left({}^tAB\right)) = \operatorname{tr}({}^tBA) = \langle B, A\rangle$.
Donc $\langle\, ,\rangle$ est symétrique.
On en déduit que $\langle\, ,\rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)

Soit $A=\left(A_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$.

$\langle A\,,A\rangle=\mathrm{tr}({}^tAA)=\sum\limits_{i=1}^{n}({}^tAA)_{i,i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}({}^tA)_{i,k}A_{k,i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_{k,i}^2$ donc $\langle A\,,A\rangle\geqslant 0$.

Donc $\langle\,,\rangle$ est positive. (2)

Soit $A=\left(A_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$ telle que $\langle A\,,A\rangle=0$.

Alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_{k,i}^2=0$. Or, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $A_{k,i}^2\geqslant 0$.

Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $A_{k,i}=0$. Donc $A=0$.

Donc $\langle\,,\rangle$ est définie. (3)

D'après (1),(2) et (3), $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Remarque importante : Soit $(A,B)\in E^2$.

On pose $A=\left(A_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B=\left(B_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Alors $\langle A\,,B\rangle=\mathrm{tr}({}^tAB)=\sum\limits_{i=1}^{n}({}^tAB)_{i,i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left({}^tA\right)_{i,k}B_{k,i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_{k,i}B_{k,i}$.

Donc $\langle\,,\rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.

2. (a) Soit $M\in S_n(\mathbb{R})\cap A_n(\mathbb{R})$.
alors ${}^tM=M$ et ${}^tM=-M$ donc $M=-M$ et $M=0$.
Donc $S_n(\mathbb{R})\cap A_n(\mathbb{R})=\{0\}$. (1)
Soit $M\in E$.
Posons $S=\dfrac{M+{}^tM}{2}$ et $A=\dfrac{M-{}^tM}{2}$.
On a $M=S+A$.
${}^tS={}^t\left(\dfrac{M+{}^tM}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM+{}^t({}^tM)\right)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM+M\right)=S$, donc $S\in S_n(\mathbb{R})$.
${}^tA={}^t\left(\dfrac{M-{}^tM}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM-{}^t({}^tM)\right)=\dfrac{1}{2}\left({}^tM-M\right)=-A$, donc $A\in A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $E=S_n(\mathbb{R})+A_n(\mathbb{R})$. (2)
D'après (1) et (2), $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R})\subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
Soit $S\in S_n(\mathbb{R})$.
Prouvons que $\forall\,A\in A_n(\mathbb{R})$, $\langle S\,,A\rangle=0$.
Soit $A\in A_n(\mathbb{R})$.
$\langle S\,,A\rangle=\mathrm{tr}({}^tSA)=\mathrm{tr}(SA)=\mathrm{tr}(AS)=\mathrm{tr}(-{}^tAS)=-\mathrm{tr}({}^tAS)=-\langle A\,,S\rangle=-\langle S\,,A\rangle$.
Donc $2\langle S\,,A\rangle=0$ soit $\langle S\,,A\rangle=0$.
On en déduit que $S_n(\mathbb{R})\subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$ (1)
De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^{\perp}=n^2-\dim A_n(\mathbb{R})$.
Or, d'après 2.(a), $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$ donc $\dim S_n(\mathbb{R})=n^2-\dim A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R})=\dim A_n(\mathbb{R})^{\perp}$. (2)
D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R})=A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

3. On introduit la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\forall j\in[\![1,n]\!]$, $E_{i,j}=\left(e_{k,l}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec $e_{k,l}=\begin{cases}1 & \text{si } k=i \text{ et } l=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

On a alors $F=\mathrm{Vect}\left(E_{1,1},E_{2,2},...,E_{n,n}\right)$.

Soit $M=\left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in E$.

Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,
$M \in F^{\perp} \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \langle M, E_{i,i}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], m_{i,i} = 0$.
Donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j} \text{ telles que } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ et } i \neq j\right)$.
En d'autres termes, $F^{\perp}$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

12 CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Solution de 12 : CCINP 80

1. On pose $\forall (f,g) \in E^2$, $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(|)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(|)$ est symétrique.
   On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. (*)
   Soit $f \in E$. $(f|f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f|f) \geqslant 0$.
   Donc $(|)$ est positive. (**)
   Soit $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$.
   Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.
   Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.
   Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.
   Donc $(|)$ est définie. (***)
   D'après (*), (**) et (***), $(|)$ est un produit scalaire sur E.

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
   $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x) \in F$.
   De plus, si on note h l'application $x \mapsto \dfrac{1}{2}$,
   $(h|f) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x = 0$ et $(h|g) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^{\perp}$ (car $F = \mathrm{Vect}(f,g)$).
   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$.

13

Soit $E = \mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à p ?

Solution de 13 :

Vecteur normal à P : $(1,0,-1)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_P\big((x,y,z)\big) = (x,y,z) - \frac{(1,0,-1)\cdot(x,y,z)}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{2}(x+z), y, \frac{1}{2}(x+z)\right)$$

Donc $p_P(e1) = \frac{1}{2}(e_1+e_3)$, $p_P(e2) = e_2$ et $p_P(e3) = \frac{1}{2}(e_1+e_3)$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14 **CCINP 81** On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi\left(A, A'\right) = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathscr{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

Solution de 14 : CCINP 81

1. On a immédiatement $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathscr{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathscr{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathscr{F}$,
   $M \in \mathscr{F}^\perp \iff \varphi(M, \mathrm{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathscr{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathscr{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathscr{F}^\perp = \mathrm{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathscr{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathscr{F}^\perp$.
3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^\perp$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathscr{F})$ la distance de J à $\mathscr{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)||$ où $p_{\mathscr{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathscr{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}^\perp$.
   Donc $p_{\mathscr{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathscr{F}) = ||J - p_{\mathscr{F}}(J)|| = ||J - \mathrm{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

15 **CCINP 82** Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Solution de 15 : CCINP 82

1. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, $B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

   $(A + A'|B) = \left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = (a+a')a'' + (b+b')b'' + (c+c')c'' + (d+d')d''$.
   Donc $(A + A'|B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A|B) + (A'|B)$.
   $(\alpha A|B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha (A|B)$.
   On en déduit que $(.|.)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(.|.)$ est symétrique.
   Donc $(.|.)$ est une forme bilinéaire et symétrique. (*)
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

   $(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$. Donc $(.|.)$ est positive. (**)
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A|A) = 0$.

   Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.
   Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.
   Donc $(.|.)$ est définie. (***)
   D'après (*), (**) et (***), $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$ car $\forall (a,b,d) \in \mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = 0$.
   On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $d(A,F) = ||A - p_F(A)|| = ||\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}|| = 1$.

16 Déterminer les équations des bissectrices, dans un repère orthonormal du plan, de $\mathcal{D} : 3x + 4y = 7$ et $\mathcal{D}' : 5x - 12y = -7$.

Produit scalaire

17 Le retour des polynômes de Tchebbychev

1. Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles :

$$\langle P, Q\rangle_2 \ = \ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P(t)Q(t)dt$$

On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation, valable pour tout n entier naturel et tout réel θ , $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Démontrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale ce produit scalaire.

2. Soit E l'espace $C([-1,1],\mathbf{R})$. Montrer que, si $(f,g)\in E^2$,

$$\langle f, g\rangle_2 \ = \ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t)dt$$

est bien défini. Montrer que l'on construit ainsi un produit scalaire sur E, et que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale.

18

Soient f et g des applications de E dans E telles que

$$\forall (x,y)\in E^2,\ (f(x)|y) = (x|g(y)).$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Solution de 18 :

Par symétrie, il suffit de montrer par exemple que f est linéaire.

Soient $x, x'\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On veut montrer que $f(x+\lambda x') = f(x)+\lambda f(x')$.

On calcule, pour $y\in E$,

$$\begin{aligned}\big(f(x+\lambda x') - f(x) - \lambda f(x')|y\big) &= \big(f(x+\lambda x')|y\big) - \big(f(x)|y\big) - \lambda\big(f(x')|y\big)\\ &= \big(x+\lambda x'|g(y)\big) - \big(x|g(y)\big) - \lambda\big(x'|g(y)\big)\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $f(x+\lambda x') - f(x) - \lambda f(x') \in E^{\perp} = \{0\}$.

19

Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles :

$$\langle P, Q\rangle \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t)Q(t)dt$$

1. Démontrer qu'il existe une unique suite orthogonale de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, tels que pour tout n, P_n soit unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré n.
2. Démontrer qu'il existe deux suites (λ_n) et (μ_n) de réels telles que, pour tout entier naturel $n\geqslant 2$,

$$P_n = (X-\lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

(indication : décomposer XP_{n-1} dans la base des P_k).

Solution de 19 :

1. L'existence vient de Schmidt.

   Pour l'unicité, on prend deux suites (P_n), (Q_n) convenant, et pour tout n, on décompose $P_n \in \text{Vect}(Q_0, \ldots, Q_n)$ et on obtient $P_n = Q_n$ par orthogonalité.

2. XP_{n-1} de degré n et unitaire se décompose dans la base orthogonale $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en $XP_{n-1} = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-}$

   avec $\lambda_i = \dfrac{(P_i|XP_{n-1})}{\|P_i\|} = \dfrac{(XP_i|P_{n-1})}{\|P_i\|} = 0$ si $i < n-2$ pour des raisons de degré.

20 **Écrit Mines – CCINP** On considère le produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt$ sur $\mathbf{R}[X]$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une suite orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout n.
3. Soit $n \geqslant 2$. On suppose que P_n possède k racines de multiplicité impaire dans $]0,1[$, $a_1, \ldots, a_k$, avec $k < n$.
   (a) Vérifier que, si $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$, alors $(P_n|Q) = 0$
   (b) En écrivant $(P_n|Q)$ sous forme intégrale, aboutir à une contradiction.
   (c) Démontrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont toutes dans $]0,1[$.
4. On fixe $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, on ait
   $$\int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$
   Donner une expression de ces scalaires en fonction des intégrales sur $[0,1]$ des L_k, où les L_k désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
5. On reprend les notations de la question précédente. En utilisant la division euclidienne par P_n, montrer que
   $$\forall P \in \mathbf{R}_{2n-1}[X] \qquad \int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)\ .$$
   Ce type de résultat est à la base des méthodes de Gauss pour les calculs approchés d'intégrales.

21 Décomposition QR – oral Mines

1. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que
$$A = QR$$
(on interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).
2. Expliquer l'intérêt de la décomposition $A = QR$ pour la résolution d'un système $AX = B$.
3. Y-a-t-il unicité de la décomposition ?
4. On veut montrer l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, $(c_1,\dots,c_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $||.||$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$, alors
$$|\det M| \leqslant ||c_1||\dots||c_n||$$
   (a) Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.
   (b) On suppose M inversible, on l'écrit $M = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Si $(\gamma 1,\dots,\gamma_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de R, si q est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à Q, exprimer γ_k à l'aide de q et de c_k
   (c) Conclure
   (d) Peut-il y a voir égalité dans l'inégalité de Hadamard ?

Solution de 21 : Décomposition QR – oral Mines

1. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que
$$A = QR$$
(on interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).

Si $(c_1,\dots,c_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A, A est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $\mathbf{R}^n$ à la base $\mathscr{C} = (c_1,\dots,c_n)$. On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique (pour lequel, donc, $\mathscr{B}_c$ est orthonormale). Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ obtenue à partir de $\mathscr{C}$ par le procédé de Schmidt. On a alors, avec des notations habituelles :
$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{C}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}\ \mathrm{P}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$$
Mais $\mathrm{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}$, matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, est orthogonale. Et l'algorithme de Schmidt garantit que, pour tout k,
$$c_k \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$$
où l'on note $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ (on a en effet, pour tout k,
$$\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(c_1,\dots,c_k) \quad)$$
et donc... ça marche.

---

2. Expliquer l'intérêt de la décomposition $A = QR$ pour la résolution d'un système $AX = B$.

On écrit le système équivalent $RX = Q^T B$, c'est un système triangulaire.

---

3. Y-a-t-il unicité de la décomposition ?

Visiblement non, vu le (petit) choix dans l'algorithme de Schmidt. Mais allons plus loin : à quelle condition a-t-on

$$QR = Q'R'$$

où Q et Q' sont orthogonales, R et R' triangulaires supérieures inversibles ?
On remarque que l'égalité étudiée équivaut à

$$Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$$

où le premier membre est une matrice orthogonale, le second une matrice triangulaire supérieure. Le problème est donc : quelles sont les matrices à la fois orthogonales et triangulaires supérieures ? construisons une telle matrice : son premier vecteur colonne, unitaire et dont seule la première composante est possiblement non nulle, est donc $(\pm 1, 0, \dots, 0)$. Son deuxième vecteur colonne est orthogonal au premier, sa première composante est donc nulle. Donc seule sa deuxième composante est non nulle, et vaut nécessairement ± 1 car il est unitaire. Ainsi de suite... Bref,

$$\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbf{R}) = \left\{D_\epsilon \ ; \ \epsilon \in \{-1, 1\}^n\right\}$$

où, si $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, $D_\epsilon = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. On conclut que

$$QR = Q'R' \ \Leftrightarrow \exists \epsilon \in \{-1, 1\}^n \quad R' = D_\epsilon R \text{ et } Q' = QD_\epsilon$$

(on s'est servi du fait que D_ϵ était sa propre inverse). Grosso modo, cela signifie que dans deux décompositions QR, au signe près on retrouve les mêmes coefficients.

---

4. On veut montrer l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, $(c_1, \dots, c_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $||.||$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$, alors

$$|\det M| \leqslant ||c_1|| \dots ||c_n||$$

   (a) Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.

   Le premier membre est nul, le second membre est positif.

   (b) On suppose M inversible, on l'écrit $M = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Si $(\gamma 1, \dots, \gamma_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de R, si q est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à Q, exprimer γ_k à l'aide de q et de c_k

   ---

   $c_k = q(\gamma_k)$

   (c) Conclure

   Donc, pour tout k, $\|c_k\| = \|\gamma_k\|$. Or, pour tout k,

$$\|\gamma_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} R_{i,k}^2} \geqslant |R_{k,k}|$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\prod_{k=1}^{n} |R_{k,k}| = |\det(R)| = |\det(M)|$$

(d) Peut-il y avoir égalité dans l'inégalité de Hadamard ?

Oui. Si et seulement si la matrice R est diagonale, d'après ce qui précède. Et donc si et seulement si les colonnes de M forment une famille orthogonale.

---

22 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de son produit scalaire canonique.

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les parties de E contenant les fonctions paires et impaires respectivement.

Montrer que $\mathscr{I} = \mathscr{P}^{\perp}$ et déterminer la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

23 Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{2}\right)^n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}}.$$

Solution de 23 :

Cauchy-Schwarz.

24 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels. Montrer que

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\left(x_1^2 + \cdots x_n^2\right).$$

Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Solution de 24 :

Cauchy-Schwarz.

Projection orthogonale

25 On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Soit D la droite d'équation $x=-y=z$, s la symétrie orthogonale par rapport à D et p le projecteur orthogonal sur D.

1. Déterminer les matrices de s et p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Considérons les applications f et g définies sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y)=\langle x|p(y)\rangle \ \text{ et } \ g(x,y)=\langle x|s(y)\rangle\,.$$

Démontrer que f et g sont des formes bilinéaires symétriques. Sont-elles définies positives ?

26 **Oral Mines** Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien, p un projecteur de E.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall\, x\in E,\ \ \|p(x)\|\leqslant\|x\|$.

Distance à un sous-espace

27 **Projection sur un convexe fermé – écrit CCINP** On désigne par $\mathscr{C}$ une partie convexe non vide d'un espace euclidien E.

1. On suppose $\mathscr{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathscr{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que
$$||x-y||=\inf_{z\in\mathscr{C}}||x-z|| \quad (=d(x,\mathscr{C})).$$
Le fait que la norme soit euclidienne ne sert que pour l'unicité.
2. On suppose seulement $\mathscr{C}$ fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.
3. Soit y un élément de $\mathscr{C}$; démontrer que
$$\Big(\ y=p(x)\ \Big)\iff\Big(\forall z\in\mathscr{C}\quad\langle y-x,y-z\rangle\leqslant 0\ \Big)$$
(pour $\Longrightarrow$, on pourra écrire que, si $z\in\mathscr{C}$, pour tout $t\in[0,1]$, $p(x)+t\big(z-p(x)\big)\in\mathscr{C}$).
4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :
$$||p(x)-p(x')||^2\leqslant\langle x-x',p(x)-p(x')\rangle$$
puis démontrer que p est continue.

Solution de 27 : Projection sur un convexe fermé – écrit CCINP

1. **On suppose $\mathscr{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathscr{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que :**
$$||x-y||=\inf_{z\in\mathscr{C}}||x-z|| \quad (=d(x,\mathscr{C})).$$
Existence : Soit x fixé dans E. L'application $z\mapsto\|x-z\|$, continue sur le compact $\mathscr{C}$, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes ; en particulier, elle atteint un minimum en un point $y\in\mathscr{C}$.

Unicité : C'est nettement plus difficile, et il faut faire un dessin. Remarquons que l'existence ne suppose pas la norme euclidienne, on va en revanche en avoir besoin pour l'unicité.
Supposons que y_1 et y_2 soient deux éléments de $\mathscr{C}$ tels que

$$\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = d(x,\mathscr{C})$$

L'identité du parallélogramme donne alors :

$$2(\|y_1-x\|^2+\|y_2-x\|^2) = \|y_1+y_2-2x\|^2+\|y_1-y_2\|^2$$

(ce n'est qu'un dessin clair et bien observé qui peut donner l'idée d'écrire cela !) Divisons par 4 :

$$d(x,\mathscr{C})^2 = \|\frac{1}{2}(y_1+y_2)-x\|^2+\frac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2$$

Mais, par convexité, $\frac{1}{2}(y_1+y_2)\in\mathscr{C}$, donc $\|\frac{1}{2}(y_1+y_2)-x\|^2 \geqslant d(x,\mathscr{C})^2$, ce qui entraîne nécessairement $\|y_1-y_2\|^2=0$, donc $y_1=y_2$.
On peut écrire différentes choses menant à cette unicité, voir des triangles isocèles et des triangles rectangles plutôt que des parallélogrammes, etc...

2. **On suppose seulement $\mathscr{C}$ fermée. Démontrer que le résultat est encore vrai.**

Existence : On part de l'idée simple suivante : ce n'est pas parmi les points de $\mathscr{C}$ « éloignés » de x que l'on trouvera y. On considère donc encore x fixé dans E. Soit $r>0$ tel que

$$B'(x,r)\cap\mathscr{C}\neq\varnothing$$

(l'existence d'un tel r ne pose pas de problème : on peut prendre $r=d(x,y)$ où y est un élément quelconque de $\mathscr{C}$). Posons alors $\mathscr{C}'=B'(x,r)\cap\mathscr{C}$. Fermée (comme intersection de fermés) et bornée (car incluse dans une boule) dans E de dimension finie, $\mathscr{C}'$ est compacte. Il existe donc $y_0\in\mathscr{C}'$ tel que

$$\|x-y_0\| = d(x,\mathscr{C}')$$

Si $z\in\mathscr{C}$, de deux choses l'une :
— Soit $z\in\mathscr{C}'$, et alors $\|x-y_0\|\leqslant\|x-z\|$,
— Soit $z\in\mathscr{C}'$, et alors $\|x-y_0\|\leqslant r<\|x-z\|$
On voit que $\|x-y_0\|$ minore $\{\|x-z\|\ ;\ z\in\mathscr{C}\}$. Mais $y_0\in\mathscr{C}$, donc

$$\|x-y_0\| = d(x,\mathscr{C})$$

Unicité : La démonstration du **1** marche encore : on n'a utilisé que la convexité de $\mathscr{C}$.

Soit y un élément de $\mathscr{C}$; démontrer que

$$\Big(\ y=p(x)\ \Big) \iff \Big(\forall z\in\mathscr{C}\quad \langle y-x,y-z\rangle\leqslant 0\Big)$$

— Supposons que $y\in\mathscr{C}$ vérifie

$$\forall z\in\mathscr{C}\quad \langle y-x,y-z\rangle\leqslant 0\Big)$$

Alors, pour tout $z\in\mathscr{C}$,

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|(x-y)+(y-z)\|^2\\ &= \|x-y\|^2+\|y-z\|^2+2\langle x-y,y-z\rangle\\ &\geqslant \|x-y\|^2+\|y-z\|^2\\ &\geqslant \|x-y\|^2\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $y=p(x)$.

— Supposons $y = p(x)$; soit $z \in \mathscr{C}$; par convexité, on a

$$\forall t \in [0,1] \qquad (1-t)y + tz \in \mathscr{C}$$

et donc

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|(1-t)y + tz - x\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$$

ce qui s'écrit

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|(y-x) + t(z-y)\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$$

ou encore, en développant,

$$\forall t \in [0,1] \qquad \|y-x\|^2 + t^2\|z-y\|^2 + 2t\langle y-x, z-y\rangle \geqslant \|y-x\|^2$$

et donc

$$\forall t \in [0,1] \qquad t^2\|z-y\|^2 + 2t\langle y-x, z-y\rangle \geqslant 0$$

d'où, en multipliant par $1/t$ si $t > 0$,

$$\forall t \in]0,1] \qquad t\|z-y\|^2 + 2\langle y-x, z-y\rangle \geqslant 0$$

et en prenant la limite quand $t \to 0$,

$$\langle y-x, z-y\rangle \geqslant 0$$

qui est bien ce qu'on voulait.

3. **En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :**

$$||p(x) - p(x')||^2 \leqslant \langle x - x', p(x) - p(x')\rangle$$

puis démontrer que p est continue

Partons du second membre :

$$\langle x - x', p(x) - p(x')\rangle = \langle x - p(x), p(x) - p(x')\rangle + \langle p(x) - p(x'), p(x) - p(x')\rangle + \langle p(x') - x', p(x) - p(x')\rangle$$

La question précédente permet alors de conclure à l'inégalité voulue. Puis, par Cauchy-Schwarz, on obtient que p est 1-lipschitzienne donc continue.

28 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on définit $v_1 = (1,2,-1,1)$, $v_2 = (0,3,1,-1)$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Déterminer un système d'équations (dans la base canonique) et une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Soit $e_1 = (1,0,0,0)$. Calculer $\mathrm{d}(e_1, F)$.

29 Calculer, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\displaystyle\inf_{M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$

Solution de 29 :

Dans ce genre d'exercice qui se pose à l'oral, l'important est d'identifier un problème de projection orthogonale. Comme dans l'exercice précédent. Ensuite, il faut trouver la réponse aux questions suivante : dans quel espace ? ici, assez clairement, dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Pour quel produit scalaire ? ici, le produit scalaire canonique, qui est donné par

$$(U|V) = \sum_{i,j} U_{i,j} V_{i,j} = \mathrm{Tr}\left(U^T\ V\right)$$

Sur quel sous-espace? sur $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Une bonne idée est de déterminer une base orthonormale de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ pour ce produit scalaire canonique. Une meilleure est de montrer que, pour ce produit scalaire canonique,

$$\mathscr{S}_n(\mathbf{R})^{\perp} = \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$$

Alors le théorème de projection orthogonale dit que la borne inférieure recherchée est un minimum, atteint en un point unique :

$$M = P_{\mathscr{S}_n(\mathbf{R})}(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

et valant

$$\|\frac{1}{2}(A - A^T)\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(A_{i,j} - A_{j,i})^2$$

30 Pour tous réels a, b, c, on pose $I(a,b,c) = \int_{-1}^{1}\left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2 \mathrm{d}x$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (a,b,c) tel que $I(a,b,c)$ soit minimum et le déterminer.

31 **Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit**

Si $u_1,\ldots,u_n$ sont n vecteurs d'un espace préhilbertien réel $\left(E, \langle .,. \rangle\right)$, on définit leur matrice de Gram, $G(u_1,\ldots,u_n)$, comme la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en ligne i et colonne j est $\langle u_i, u_j\rangle$.

1. Démontrer que si la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est liée alors le déterminant de sa matrice de Gram est nul (on pourra commencer par supposer que u_n s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_i).
2. On suppose maintenant $(u_1,\ldots,u_n)$ libre, et on considère $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$. On note :

$$A = \mathrm{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_1,\ldots,u_n).$$

   (a) Exprimer $G = G(u_1,\ldots,u_n)$ à l'aide d'un produit faisant intervenir A et sa transposée.

   (b) Montrer que le déterminant de G est strictement positif.
3. On suppose la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ libre; on désigne par F le s.e.v. engendré par $(u_1,\ldots,u_n)$, et par x un vecteur de E. Démontrer :

$$\left[d(x,F)\right]^2 = \frac{\det\left(G(u_1,\ldots,u_n,x)\right)}{\det det\left(G(u_1,\ldots,u_n)\right)}$$

   On pourra par exemple, dans le calcul de $\det\left(G(u_1,\ldots,u_n,x)\right)$ *écrire* $x = (x-z)+z$, *z désignant le projeté orthogonal de x sur F.*

Solution de 31 : Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit

1. Supposons $u_n = \alpha_{n-1}u_{n-1} + \ldots + \alpha_1 u_1$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\langle u_i, u_n\rangle = \alpha_{n-1}\langle u_i, u_{n-1}\rangle + \ldots + \alpha_1\langle u_i, u_1\rangle$$

   ou encore

$$\begin{pmatrix}\langle u_1,u_n\rangle\\ \vdots \\ \langle u_n,u_n\rangle\end{pmatrix} = \alpha_{n-1}\begin{pmatrix}\langle u_1,u_{n-1}\rangle\\ \vdots \\ \langle u_n,u_{n-1}\rangle\end{pmatrix} + \cdots + \alpha_1\begin{pmatrix}\langle u_1,u_1\rangle\\ \vdots \\ \langle u_n,u_1\rangle\end{pmatrix}$$

   que l'on peut lire de la manière suivante :

$$c_n = \alpha_{n-1}c_{n-1} + \ldots + \alpha_1 c_1$$

où les c_k sont les colonnes de la matrice de Gram $G(u_1,\dots,u_n)$. Les colonnes étant liées, le déterminant est nul.

Dans le cas général, il n'est pas nécessaire que u_n soit combinaison linéaire des autres u_i. Mais si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée, au moins un des u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_k. Et on conclut de la même manière, en montrant que la colonne c_i est alors combinaison linéaire des autres.

---

2. Rappelons que, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$,

$$G_{i,j} = \langle u_i, u_j\rangle$$

et, la base $(e_1,\dots,e_n)$ étant orthonormale,

$$A_{i,j} = \langle e_i, u_j\rangle$$

Mais d'autre part (calcul du produit scalaire dans une base orthonormale) :

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u_i\rangle\langle e_k, u_j\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} A_{k,j} \\ &= \left({}^tA\ A\right)_{i,j} \end{aligned}$$

et donc

$$G = A^{\mathsf{T}} A$$

On en déduit

$$\det(G) = (\det A)^2 > 0$$

$(A \in GL_n(\mathbf{R}))$. En fait, on peut dire plus : G est symétrique définie positive.

---

3. La dernière colonne de $G(u_1,\dots,u_n,x)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x\rangle \\ \langle u_2, x\rangle \\ \\ \\ \langle u_n, x\rangle \\ \langle x, x\rangle \end{pmatrix} \vdots = \begin{pmatrix} \langle u_1, z\rangle \\ \langle u_2, z\rangle \\ \\ \\ \langle u_n, z\rangle \\ \langle x, z\rangle \end{pmatrix} \vdots + \begin{pmatrix} \langle u_1, x-z\rangle \\ \langle u_2, x-z\rangle \\ \\ \\ \langle u_n, x-z\rangle \\ \langle x, x-z\rangle \end{pmatrix} \vdots$$

où z est le projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$. Donc :

$$\begin{pmatrix} \langle u_1, x\rangle \\ \langle u_2, x\rangle \\ \\ \\ \langle u_n, x\rangle \\ \langle x, x\rangle \end{pmatrix} \vdots = \begin{pmatrix} \langle u_1, z\rangle \\ \langle u_2, z\rangle \\ \\ \\ \langle u_n, z\rangle \\ \langle z, z\rangle \end{pmatrix} \vdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \\ \langle x-z, x-z\rangle \end{pmatrix} .$$

Utilisons la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne. On obtient, notant $g(\ldots) = \det(G(\ldots))$:

$$g(u_1,\ldots,u_n,x) = g(u_1,\ldots,u_n,z) + \begin{vmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \ldots & \ldots & \langle u_1,u_n\rangle & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \langle u_n,u_1\rangle & \ldots & \ldots & \langle u_n,u_n\rangle & 0 \\ \langle z,u_1\rangle & \ldots & \ldots & \langle z,u_n\rangle & \|x-z\|^2 \end{vmatrix}$$

(on réutilise le fait que $\langle u_k,x\rangle = \langle u_k,z\rangle + \langle u_k,x-z\rangle = \langle u_k,z\rangle$). On développe alors par rapport à la dernière colonne le dernier déterminant ; tenant compte de la nullité de $g(u_1,\ldots,u_n,z)$ (famille liée), on conclut :

$$g(u_1,\ldots,u_n,x) = \|x-z\|^2 \; g(u_1,\ldots,u_n)$$