Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 8

Exercice I (Commun) : Séries entières – E3A PC 2020

1. • $0 < a_0 \leqslant 1$ car $a_0 = 1$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $0 < a_k \leqslant 1$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors $\dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n-k+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ d'où $0 < \dfrac{a_k}{n-k+2} \leqslant \dfrac{a_k}{2} \leqslant 1$ car $0 < a_k \leqslant 1$.

On a alors $0 < \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} 1$ d'où $0 < \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{n+1}{n+1}$ puis $0 < a_{n+1} \leqslant 1$.

• Par principe de récurrence (forte) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in]0, 1].}$

2. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de la série entière géométrique $\sum x^n$ dont le rayon de convergence vaut 1.

$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$

3. **a)** $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ a même rayon de convergence que $\sum \dfrac{n}{n+2} x^n$, et donc que $\sum x^n$ puisque $\dfrac{n}{n+2} \sim 1$ $\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \dfrac{x^n}{n+2} \text{ vaut 1.}}$

b) On en déduit que

— pour tout $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$, $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ converge,

— pour tout $x \in \mathbb{R}, |x| > 1$, $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ diverge.

Par ailleurs, pour $x = 1$, $\sum \dfrac{1}{n+2}$ diverge car $\dfrac{1}{n+2} \sim \dfrac{1}{n} \geq 0$ et la série harmonique diverge.

Pour $x = -1$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées car $\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

Par conséquent, $\boxed{x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ est uniquement définie sur } [-1, 1[.}$

c) Le rayon de convergence de la série entière produit de Cauchy de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des deux rayons de convergence. Comme ce minimum vaut 1, $\boxed{\sum w_n x^n \text{ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1}}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n+2-k} = (n+1)a_{n+1}.$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1)a_{n+1}.}$

d) À l'intérieur du disque de convergence, on peut dériver une série entière termes à termes et effectuer un produit de Cauchy, donc

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1, 1[\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} w_n x^n\\ &= f(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = f(x)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right)}$$

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0, a_0 > 1$, donc $\forall x \in [0, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n > 0$ et $f(x) > 0$.

Puis pour tout $x \in [0, 1[$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$, les séries étant bien toutes convergentes pour $x \in [0, 1[$. Par primitivation licite d'une série entière terme à terme sur $[0, 1[\subset]-1, 1[$, et comme comme $f(0) = 1$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[,\ \ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.}$$

5. Soit $x \in]0, 1[$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} = -\ln(1-x) + 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}$.

Donc $\ln(f(x)) = \dfrac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}$. Ainsi $\boxed{\forall x \in]0, 1[,\ f(x) = e(1-x)^{\frac{1}{x}-1} \text{ et } f(0) = e^0 = 1.}$

6. $\dfrac{1}{2} \in [0, 1[$, donc $\sum a_n \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}.}$

Exercice II (CCINP) : Probabilités – CCINP 2018 Maths 2

1. Soit $k \geqslant 1$. Quand $n \to +\infty$, $(n-i) \sim n$ pour $i \in [\![0, k-1]\!]$ fixé.

Par produit, le nombre de terme étant **fixe**,

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) \sim n^k$$

puis $\left(\dfrac{n}{n}\dfrac{n-1}{n}\dots\dfrac{n-k+1}{n}\right) \sim 1$.

On a donc bien $\boxed{\left(\dfrac{n}{n}\dfrac{n-1}{n}\dots\dfrac{n-k+1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

Pour $n \geqslant k$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

or $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right)$ et on a $\frac{\lambda}{n} \to 0$ et $\lambda \neq 0$ donc $(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \sim -n\frac{\lambda}{n} = -\lambda$

d'où, comme exp est continue, on a $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \to \mathrm{e}^{-\lambda}$.

Ainsi par produit et à l'aide du calcul précédent $\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}.}$

2. On a répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{365}$, le succès étant : « le candidat est convoqué le jour de son anniversaire. » X_n compte le nombre de succès. Ainsi

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{365}\right) : X_n \text{ suit la loi de binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{365} \text{ donc } \mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{365}}$$

d'après le cours de première année.

3. On cherche $\mathbb{P}(X_{219} = 2)$ où $X_{219} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(219, \frac{1}{365}\right)$. On a $n = 219 > 50$, $p = \frac{1}{365} \leqslant 0{,}01 = \frac{1}{100}$ et $\frac{219}{365} < 10$.

On approche donc X_{219} par la loi de Poisson de paramètre $\frac{219}{365} = \frac{3}{5}$ (après simplification par 73 !!). Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{219} = 2) \approx \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 \mathrm{e}^{-3/5}}{2!} = \frac{9\mathrm{e}^{-0,6}}{50} \approx \frac{9 \times 0{,}55}{50} = 9 \times 0{,}011$$

Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats, une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire est $\boxed{0{,}099 = 9{,}9\ \%.}$

Problème (CCINP) : Algèbre bilinéaire – CCP 2014 Maths 2

1.a Soit $s \in \mathscr{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de s : $\boxed{s \text{ est orthodiagonalisable.}}$

Traduction matricielle : si $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $\boxed{S = PDP^{-1} = PDP^{\top}.}$

1.b $\chi_S(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\mathrm{Sp}(S) = \{0\}$ et si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux.

Ainsi $\boxed{S \text{ est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.}}$

2.a Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i$. Or la base β est orthonormée, donc $\boxed{R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.}$

2.b Supposons que $x \in S(0,1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Ainsi, $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1$.

On a bien montré que, $\boxed{\text{pour tout } x \in S(0,1),\ R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n].}$

3.a Supposons que s est symétrique défini positif.

Soit λ une valeur propre de s. Il existe un vecteur propre x : x est non nul et $s(x) = \lambda x$.

Ainsi $0 < \langle s(x)|x \rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\| > 0$, donc $\boxed{\lambda > 0.}$

Si maintenant s est seulement symétrique positif, on a $0 \leqslant \lambda \|x\|^2$ donc $\boxed{\lambda \geqslant 0.}$

3.b $s_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans la base B du vecteur $s(e_j)$, or B est orthonormée, car on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc $s_{i,j} = \langle e_i | s(e_j) \rangle$.

En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i | s(e_i) \rangle$, or e_i est un vecteur unitaire, donc d'après la question 2.b, $\boxed{s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n].}$

Un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

4. Les coefficients de $M^{\top}M - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M, donc d'après le cours, $\boxed{\text{l'application } M \mapsto M^{\top}M - I_n \text{ est continue.}}$

5. D'après le cours, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : $\boxed{\text{pour tout } i \in \{1, \cdots, n\},\ |a_{i,j}| \leqslant 1.}$

6. Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est encore bornée quelle que soit la norme utilisée sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si l'on note f l'application $M \mapsto M^{\top}M - I_n$ de la question 4, alors $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_n\})$, or le singleton $\{0_n\}$ est un fermé et f est continue, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7.a D'après la question 1.a, il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^{\top}$.

Ainsi, $\boxed{T(A) =}\ \mathrm{Tr}\left([AP\Delta]P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}[AP\Delta]\right) = \boxed{\mathrm{Tr}(B\Delta)}$ en posant $B = P^{-1}AP$.

A et P sont toutes deux orthogonales et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc $\boxed{B \text{ est orthogonale.}}$

7.b On vérifie que, pour tout $(C,D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}((\lambda C + D)S) = \lambda \mathrm{Tr}(CS) + \mathrm{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \mathrm{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

7.c Avec les notations de la question 7.a, $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$ le (i,j)-ème coefficient d'une matrice M, $T(A) = \sum_{i=1}^{n} (B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\Delta_{j,i}$, mais Δ est diagonale, donc $T(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$. D'après la question 5, et les λ_i étant positifs, $T(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$.

Ainsi $t \leqslant \mathrm{Tr}(S)$, mais de plus $\mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc $\boxed{t = \mathrm{Tr}(S).}$

Inégalité d'Hadamard

8. L'inégalité demandée est une conséquence de l'inégalité aritmético-géométrique, car on sait que $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, car S est diagonalisable (donc χ_S est scindé).

9. On calcule $S_\alpha^\top = S_\alpha$, puis, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top S_\alpha X = (DX)^\top S(DX) \geqslant 0$ car $DX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et car S est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} (D^\top S D)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(j,k)\in[\![1,n]\!]^2} [D^\top]_{i,j} S_{j,k} D_{k,i},$$

mais D est diagonale, donc $\boxed{\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}.}$

10. On peut appliquer l'inégalité $(*)$ à la matrice S_α car elle est bien dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, or

$$\det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\right)^2 \det(S)$$

et $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{i,i}} s_{i,i} = 1$, donc $\boxed{\det(S) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{i,i}}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.}$

11. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top S_\varepsilon X = X^\top S X + \varepsilon \|X\|^2 \geqslant 0$, donc $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus d'après la question 3.b, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant s_{i,i}$, donc $s_{i,i} + \varepsilon > 0$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question précédente à S_ε : pour tout $\varepsilon > 0$, $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (s_{i,i} + \varepsilon)$.

De plus il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc $S_\varepsilon = P(\Delta + \varepsilon I_n)P^{-1}$, ce qui prouve que $\det(S_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^{n} (s_{i,i} + \varepsilon)$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0 : $\boxed{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.}$

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

12. Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $X^\top B X = (\Omega X)^\top A (\Omega X) > 0$, car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Ω est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus Ω est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$.

Or, $\det(A) = 1$, donc $\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$: on a prouvé que $\boxed{B \in \mathcal{U}.}$

De plus, $\boxed{\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}([A\Omega\Delta]\Omega^\top) = \mathrm{Tr}(\Omega^\top [A\Omega\Delta]) = \mathrm{Tr}(B\Delta).}$

13. D'après la question précédente, $\{\mathrm{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} \subset \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$.

Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B \Omega^\top$.

En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et que $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc $\boxed{\{\mathrm{Tr}(AS) \mid A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}.}$

Prenons $x \in \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 3.b, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. $\boxed{\text{Elle possède donc une borne inférieure.}}$

14. Par application de l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(B\Delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n}.}$$

15. Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11, $\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \geqslant \det(B) = 1$, donc $\left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i}\right)^{1/n} \geqslant 1$.

Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\mathrm{Tr}(B\Delta) \geqslant n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}.}$

16. Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \mid B \in \mathcal{U}\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geqslant n(\det(S))^{1/n}$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^\top D X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2 > 0$, donc $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$, donc $D \in \mathcal{U}$. Or $\mathrm{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}$, donc

$\boxed{m = n(\det(S))^{1/n} = m\sqrt[n]{\det S}.}$

Fin du corrigé