# Devoir en Temps Limité n° 8

**CALCULATRICES INTERDITES**

**SUJET CCINP ou Mines-Ponts**

Rapport CCMP 2019 : *Comme disait Amy Sherald :*
*« People who don't quit eventually rise to the top, because the world is full of quitters ».*

## Exercice I (Commun) : Séries entières

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

**1.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.

**2.** On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in ]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**3.** **a)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

**b)** Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

**c)** Soit $\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel $n$, une expression de $w_n$ à l'aide de la suite $(a_n)$.

**d)** En déduire que l'on a pour tout $x \in ]-1,1[$, une relation entre $f'(x)$, $f(x)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

**4.** Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

**5.** En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

**6.** Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

## Exercice II (CCINP) : Probabilités

Dans cet exercice, $n$ est un entier tel que $n \geqslant 2$.

**1.** Question préliminaire

Soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres $n$ et $p = \frac{\lambda}{n}$.

Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$. On convient alors d'approcher pour $n \geqslant 50$, $p \leqslant 0{,}01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

**2.** Un examinateur interroge à l'oral du concours CCP $n$ candidats tous nés en 1998. On suppose que les dates de naissances des $n$ candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 1998. On note $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable $X_n$ et donner son espérance.

**3.** Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre 0,55 comme valeur approchée de $e^{-0,6}$.

## Problème (CCINP) : Algèbre bilinéaire

### Notations et rappels

Soit $n$ un entier supérieur à 1. On désigne par $\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ |\ \rangle$ et de la norme euclidienne $\|\ \|$ associée. On note $\mathscr{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de $E$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes $s$ de $E$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \ \langle s(x)|y\rangle = \langle x|s(y)\rangle.$$

Un endomorphisme symétrique $s$ de $E$ est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E, \ \ \langle s(x)|x\rangle \geqslant 0 \ \ \text{(respectivement } \forall x \in E\setminus\{0\}, \ \ \langle s(x)|x\rangle > 0).$$

Une matrice $S$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ \ X^\top S X \geqslant 0 \ \ \text{(respectivement } \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}, \ \ X^\top S X > 0).$$

On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme $s$ de $E$ est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de $E$ est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1,\cdots,a_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \ \text{(inégalité arithmético-géométrique).}$$

### Objectif du problème

On se donne une matrice $S$ de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \operatorname{Tr}(AS)$ sur des ensembles de matrices.

### Questions préliminaires

**1.**

**1.a** Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien $E$ et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

**1.b** Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ :

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

**2.** Soit $s \in \mathscr{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de $E$ telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\varepsilon_i$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i$. Pour tout vecteur $x$ de $E$, on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x) | x \rangle.$$

**2.a** Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des $\lambda_i$ et des coordonnées de $x$ dans la base $\beta$.

**2.b** En déduire l'inclusion : $R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de $E$.

**3.**

**3.a** On suppose dans cette question que $s$ est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de $s$ sont toutes positives (respectivement strictement positives).

**3.b** Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On note $s$ l'endomorphisme de $E$ représenté par $S$ dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de $S$ comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad \lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n.$$

## Un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

On note $I_n$ la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.** Démontrer que l'application $M \mapsto M^\intercal M - I_n$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**5.** Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \quad |a_{i,j}| \leqslant 1.$$

**6.** En déduire que le groupe orthogonal $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**7.** Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Si $A$ est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \operatorname{Tr}(AS)$.

**7.a** Soit $A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale $B$ telle que :

$$T(A) = \operatorname{Tr}(B\Delta).$$

**7.b** Démontrer que l'application $T$ de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ que l'on notera $t$.

**7.c** Démontrer que, pour toute matrice orthogonale $A$ de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leqslant \operatorname{Tr}(S)$, puis déterminer le réel $t$.



## Inégalité d'Hadamard

Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (réelles positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

**8.** Démontrer l'inégalité valable pour tout $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ :

$$\det(S) \leqslant \left(\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(S)\right)^n \quad (*).$$

**9.** Soit $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $S_\alpha = D^\intercal S D$. Démontrer que $S_\alpha \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et calculer $\operatorname{Tr}(S_\alpha)$.

**10.** Dans cette question, on suppose que les coefficients diagonaux $s_{i,i}$ de $S$ sont strictement positifs et, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$. En utilisant l'inégalité $(*)$, démontrer que :

$$\det(S) \leqslant \prod_{i=1}^n s_{i,i}.$$

**11.** Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. Démontrer que $\det(S_\varepsilon) \leqslant \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$, puis conclure que :

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i \leqslant \prod_{i=1}^n s_{i,i} \quad \text{(inégalité d'Hadamard).}$$

## Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

Soit $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, et $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \Omega\Delta\Omega^\intercal$. On désigne par $\mathscr{U}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

**12.** Démontrer que, pour tout $A \in \mathscr{U}$, la matrice $B = \Omega^\intercal A \Omega$ est une matrice de $\mathscr{U}$ vérifiant :

$$\operatorname{Tr}(AS) = \operatorname{Tr}(B\Delta).$$

**13.** Démontrer que $\left\{\operatorname{Tr}(AS) \,\middle|\, A \in \mathscr{U}\right\} = \left\{\operatorname{Tr}(B\Delta) \,\middle|\, B \in \mathscr{U}\right\}$, puis que ces ensembles admettent une borne inférieure que l'on notera $m$.

**14.** Démontrer que, si $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{U}$ :

$$\operatorname{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n}(b_{1,1} \cdots b_{n,n})^{1/n}.$$

**15.** En déduire que, pour $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{U}$, $\operatorname{Tr}(B\Delta) \geqslant n(\det(S))^{1/n}$.

**16.** Pour tout entier $k$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}(\det(S))^{1/n}$ et $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$. Déterminer le réel $m$.

**Fin de l'énoncé**