CORRIGÉ DU PROBLÈME DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N°7

Problème

Partie 1 : 1er préliminaire

1. Voir cours.
2. Il suffit de composer par ln (tout est >0) et d'utiliser la concavité de ln (donc la convexité de $-\ln$) qui vient du fait que la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ et $\ln'' : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie 2 : 2e préliminaire

3. Convergence de Γ : voir cours.
La convergence en 0 est assurée par t^{x-1} avec $1-x<1$ et celle est $+\infty$ est assurée par e^{-t}.
Ne pas oublier la continuité !
4. Semblable à la question précédente.
5. **a)** À peu près immédiat, avec $t^{x-1} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}$ et $\ln t < 0$.
b) On peut, comme dans la question précédente avec $\ln t > 0$ cette fois, proposer $\left|(\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant (\ln t)^2 t^{v-1}\mathrm{e}^{-1}$, pour tout t dans $[1,+\infty[$, mais $\boxed{\left|(\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant (\ln t)^2 t^{v-1}\mathrm{e}^{-t}}$ est plus judicieux pour anticiper une domination par une fonction intégrable dans la partie suivante.

Partie 3 : La fonction Γ

Intégralement traitée en cours.

Partie 4 : ln-convexité

12. $x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{cx}) = cx$ est convexe (et concave) sur $\mathbb{R}$ car affine. donc $\boxed{x \mapsto \mathrm{e}^{cx} \text{ est ln-convexe sur } \mathbb{R}.}$
13. Si f est ln-convexe, alors en composant l'inégalité de convexité de $\ln\circ f$ par la fonction croissante $\mathrm{e}^x p$, on obtient celle de f : $\boxed{f \text{ est convexe.}}$
Réciproque fausse, contre-exemple : $x \mapsto x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ mais $\ln : x \mapsto \ln x$ ne l'est pas.
14. **a)** Il y avait une erreur d'énoncé, on montre (classiquement) que si f^2 et g^2 sont intégrables, alors $\boxed{f\times g \text{ l'est.}}$ En effet, c'est une fonction continue telle que $|fg| \leqslant \dfrac{1}{2}(f^2+g^2)$ car $(f-g)^2 \geqslant 0$ et $(f+g)^2 \geqslant 0$.
Alors, E est une partie de $C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, non vide car contenant la fonction nulle et si $f,g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f+\lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2$ est bien continue et intégrable par opération vu le résultat précédent.
Donc $\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$
b) La bonne définition provient de la question précédente, et le caractère forme bilinéaire symétrique ne pose pas de problème (mais il faut écrire dans la copie ce que cela signifie !)
Si $f \in E$, $(f|f) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale généralisée, et comme f^2 est une fonction continue et positive, par positivité améliorée, $(f|f) \geqslant 0 \Longrightarrow f^2 = 0 \Longrightarrow f = 0$.
Donc $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ définit un produit scalaire sur } E.}$

c) Soit $x>0$. En notant $f_x : t \mapsto \sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ et $g_x : t \mapsto \ln t\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}$ de carré intégrable vu les considérations sur Γ et Γ'' dans la partie précédente, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(\Gamma')^2(x) = (f_x|g_x)^2 \leqslant (f_x|f_x)(g_x|g_x) = \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

On a bien $\boxed{(\Gamma')^2 \leqslant \Gamma\times\Gamma'' \text{ sur }]0,+\infty[.}$

d) Or $\ln\Gamma$ deux fois dérivable et $(\ln\Gamma)' = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ et $(\ln\Gamma)'' = \dfrac{(\Gamma')^2 - \Gamma\Gamma''}{\Gamma^2} \geqslant 0$, donc $\ln\Gamma$ est convexe et $\boxed{\Gamma \text{ est ln-convexe.}}$

15. **Une condition suffisante** :
a) Par convexité de g_c, on a $\mathrm{e}^{c\theta x + c(1-\theta)y} f(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta\mathrm{e}^{cx} f(x) + (1-\theta)\mathrm{e}^{cy} f(y)$, donc en multipliant par $\mathrm{e}^{-(c\theta x + c(1-\theta)y)} > 0$, $\boxed{f(\theta x+(1-\theta)y) \leqslant \theta\mathrm{e}^{c(1-\theta)(x-y)} f(x) + (1-\theta)\mathrm{e}^{c\theta(y-x)} f(y).}$
b) i.
- Soit $x=y$ et $\boxed{H(c) = f(x) \xrightarrow[c\to+\infty]{} f(x).}$
- Soit $x<y$ et $\boxed{H(c) \xrightarrow[c\to+\infty]{} 0 + (+\infty) = +\infty.}$
- Soit $x>y$ et $\boxed{H(c) \xrightarrow[c\to+\infty]{} (+\infty) + 0 = +\infty.}$

ii. En remplaçant $\mathrm{e}^{c_0(1-\theta)(x-y)} = \left(\dfrac{f(y)}{f(x)}\right)^{1-\theta}$ et $\mathrm{e}^{c_0\theta(y-x)} = \left(\dfrac{f(x)}{f(y)}\right)^{\theta}$ dans l'expression de $H(c_0)$, et comme $\theta + (1-\theta) = 1$, on trouve immédiatement $\boxed{H(c_0) = f(x)^\theta f(y)^{(1-\theta)}.}$

iii. Soit $x=y$ et H est constante, soit $x \neq y$ et La limite en $+\infty$ étant $+\infty$ et l'indication de la question précédente, nous dit que $\boxed{H \text{ décroît sur }]0,c_0] \text{ et croît sur } [c_0,+\infty[\text{, le limite en 0 étant 1.}}$

$\boxed{c_0 \text{ est le minimum global de } H.}$

c) On a alors $\ln\big(f(\theta x + (1-\theta)y)\big) \leqslant \ln(H(c))$ pour tout $c \in]0,+\infty[$ et en particulier

$$\ln\big(f(\theta x + (1-\theta)y)\big) \leqslant \ln(H(c_0)) = \theta\ln(f(x)) + (1-\theta)\ln(f(y))$$

donc $\boxed{f \text{ est ln-convexe.}}$

16. **a)** Comme $\ln\circ\varphi_{c,\theta} : x \mapsto (x-1)\ln\theta - \theta + cx = (c+\ln\theta)x - (\theta+\ln\theta)$ est affine, elle est convexe donc $\varphi_{c,\theta}$ est ln-convexe, puis par la question 13, $\boxed{\text{elle est convexe.}}$
b) Pour utiliser le résultat de la question 15, il faut montrer que si $c>0$, $F_c : x \mapsto \Gamma(x)\mathrm{e}^{cx} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_{c,t}(x)\,\mathrm{d}t$ est convexe.
Or, en intégrant l'inégalité de convexité écrite pour $\phi_{c,t}$ pour t entre 0 et $+\infty$, ce qui est licite par croissance de l'intégrale généralisée, on obtient l'inégalité de convexité pour F_c.
Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\Gamma \text{ est ln-convexe.}}$

Partie 5 : Théorème de Bohr-Mollerup

17. Comme pour la fonction Γ (récurrence), on obtient $\boxed{g(n) = (n-1)!.}$

18. **a)** Comme G est convexe, l'inégalité des trois cordes (ou décroissance des pentes des cordes : c'est du cours mais il vaut mieux faire un dessin sur la copie) donne, avec $n < x + n < n + 1$,

$$\frac{G(n) - G(n-1)}{n - (n-1)} \leqslant \frac{G(x+n) - G(n)}{(x+n) - n} \leqslant \frac{G(n+1) - G(n)}{(n+1) - n}$$

et donc $\boxed{G(n) - G(n-1) \leqslant \dfrac{G(x+n) - G(n)}{x} \leqslant G(n+1) - G(n).}$

b) Ce qui se traduit par

$$\ln((n-1)!) - \ln((n-2)!) = \ln(n-1) \leqslant \frac{\ln(g(x+n)) - \ln((n-1)!)}{x} \leqslant \ln(n!) - \ln((n-1)!) = \ln n$$

donc

$$x \ln(n-1) + \ln((n-1)!) = \ln\left((n-1)^x (n-1)!\right) \leqslant \ln(g(x+n)) \leqslant x \ln n + \ln((n-1)!) = \ln\left(n^x (n-1)!\right)$$

Soit finalement, $\boxed{(n-1)^x (n-1)! \leqslant g(x+n) \leqslant n^x (n-1)!.}$

19. On a, par définition de g, $g(x+n) = (x+n-1)g(x+n-1) = \cdots = (x+n-1)(x+n-2)\cdots x g(x)$ par récurrence. On tire alors de la question précédente

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n-1}{x+n-1} u_{n-1} \leqslant g(x) \leqslant \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = u_n$$

donc $\boxed{\dfrac{n-1}{x+n-1} u_{n-1}(x) \leqslant g(x) \leqslant u_n(x).}$

20. **a)** C'est une inégalité de convexité !
La fonction $x \mapsto (1+\alpha)^x = e^{x \ln(1+\alpha)}$ est ln-convexe donc convexe sur $\mathbb{R}$ comme vu aux questions 12 et 13.

Donc avec $0 < x < 1$, en comparant les pentes des cordes, $\dfrac{(1+\alpha)^x - (1+\alpha)^0}{x - 0} \leqslant \dfrac{(1+\alpha)^1 - (1+\alpha)^0}{1 - 0}$ ce qui donne $\boxed{(1+\alpha)^x - 1 \leqslant \alpha x.}$

On peut aussi le retrouver avec une étude de fonction sommaire.

b) On calcule

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{n}{x+n} u_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \frac{n}{x+n} u_n(x) \leqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right) \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} u_n(x) \leqslant u_n(x)$$

en utilisant la question précédente, et tout étant positif.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n(x))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}} \text{ est décroissante.}}$

c) Or cette suite est positive, donc par théorème de la limite monotone, elle a une limite $\ell(x) \in \mathbb{R}^+$.

En passant à la limite dans l'encadrement de la question 19, on obtient que $\boxed{u_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell(x) = g(x).}$

21. u_n étant indépendante de g, tout le calcul s'applique tout aussi bien à Γ.
Par une unicité de la limite, on en déduit que pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = \Gamma(x)$. C'est aussi le cas pour $x \in \mathbb{N}^*$.
Mais, pour $x \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \mathbb{N}$, l'identité $f(x+1) = x f(x)$ vérifiée à la fois par g et Γ permet de ramener systématiquement le calcul de $\Gamma(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$ à celui de $\Gamma(x - \lfloor x \rfloor)$ et de $g(x - \lfloor x \rfloor)$ avec $x - \lfloor x \rfloor \in]0,1[$ et de conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$, $g(x) = \Gamma(x)$.

Finalement, $\boxed{g = \Gamma.}$

Remarque : On en déduit aussi la formule de Gauss $\dfrac{n^x (n-1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma(x)$ *qui peut aussi s'obtenir en intégrant par parties.*