Corrigé du Devoir en Temps Limité n°7

Exercice

1. a)

```python
def deplacement(L, a, b):
    if L == "N":
        return (a, b + 1)
    else:
        return (a + 1, b)
```

b) Version iérative :

```python
def chemin(m):
    a, b = (0, 0)
    abscisses = [0]
    ordonnees = [0]
    for direction in m:
        a, b = deplacement(direction, a, b)
        abscisses.append(a)
        ordonnees.append(b)
    return abscisses, ordonnees
```

Version récursive :

```python
def chemin(m, a=0, b=0, coordonnees=([0], [0])):
    indice = len(coordonnees[0]) - 1
    if indice == len(m):
        return coordonnees
    a, b = deplacement(m[indice], a, b)
    coordonnees[0].append(a)
    coordonnees[0].append(b)
    return chemin(m, a, b, coordonnees)
```

2. a) D'après l'indication de l'énoncé, le nombre cherché est directement $\boxed{2^\ell.}$

b) Il suffit de placer, par exemple, les deux N parmi les cinq étapes : il y a $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} =$ 10 trajets possibles.

c) De même, le nombre de chemins reliant l'origine à $M(a,b)$ est $\binom{a+b}{b} = \binom{a+b}{a}$.

3. a) Pour que le chemin traverse Δ pour la première fois à l'étape 2, les seuls chemins possibles sont « N, E » et « E, N », qui amènent en $(1,1)$ (remarquons que si on est en (a,b), on y est au bout de $a+b$ étapes car on ne fait que monter ou aller à droite).
Le sujet semble sous-entendre que le choix du piéton à chaque croisement est uniforme.

On calcule alors $\boxed{P(U_1) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.}$

b) Par aller du point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$, il faut aller $n-1$ fois au Nord et $n-1$ fois à l'Est.

Le nombre de chemin correspond au nombre de façon de placer les $n-1$ Nord parmi les $2n-2$ déplacement soit $\boxed{\left|C_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-1}.}$

c) On remarque que chaque chemin reliant $(1,0)$ à $(n-1,n)$ coupe nécessairement la droite $\Delta : y = x$. Soit (a,a) le point d'abscisse minimale sur ce chemin.
Alors en prenant le symétrique de la partie du chemin entre $(1,0)$ et (a,a) par rapport à Δ et en gardant la partie du chemin entre (a,a) et $(n-1,n)$ (à voir sur un dessin !), on obtient un chemin entre $(0,1)$ et $(n-1,n)$ coupant Δ, pour la première fois, en (a,a).
On obtient ainsi une bijection entre les chemins reliant $(1,0)$ à $(n-1,n)$ et les chemins reliant $(0,1)$ à $(n-1,n)$ coupant Δ, dont les nombres sont égaux.
Ainsi, le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant Δ est $\boxed{\left|C_{(1,0)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-2}}$ sur le même principe que la question précédente.

d) Vu la question précédente, on a immédiatement que

$$\boxed{\left|T_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| = \left|C_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| - \left|C_{(1,0)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.}$$

e) Par symétrie (par rapport à Δ), on a directement aussi $\boxed{\left|T_{(1,0)}^{(n,n-1)}\right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.}$

f) Si le chemin passe pour la première fois par Δ à l'étape $2n$, c'est forcément au point de coordonnées (n,n) car le nombre d'étapes est toujours donné par la somme des coordonnées du point.
Il y a alors deux cas disjoints possible :

- Soit on a commencé par E et il faut relier le point $(1,0)$ au point $(n,n-1)$ sans croiser Δ et nécessairement terminer par un N (événement A).
- Soit on a commencé par N et il faut relier le point $(0,1)$ au point $(n-1,n)$ sans croiser Δ et nécessairement terminer par un E (événement B).

La formule des probabilités totales s'applique au système complet d'événements (N_1, E_1) et donne (avec P probabilité uniforme sur les chemins) :

$$\begin{aligned}
P(U_n) &= P(U_n|N_1)P(N_1) + P(U_n|E_1)P(E_1)\\
&= \frac{1}{2}(P(A)+P(B)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left|T_{(1,0)}^{(n,n-1)}\right|}{2^{2n-1}} + \frac{\left|T_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right|}{2^{2n-1}}\right) \qquad \text{Après l'étape 1, il reste } 2n-1 \text{ étapes.}\\
&= \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}\right)\\
&= \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}n!(n-1)!}(n-(n-1))
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{P(U_n) = \dfrac{1}{2^{2n-1}} \times \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.}$ Puis

$$P(U_n) = \frac{2 \cdot n \cdot (2n-2)!}{(2^n \cdot n!)^2} = \frac{(2n)!}{(2n-1)\,(2\times 4\times\cdots\times 2n)^2} = \frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{(2n-1)\,(2\times 4\times\cdots\times 2n)}$$

Donc $\boxed{P(U_n) = \dfrac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times 2n}.}$

4. **a)** On calcule $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2n-1}{2n+2}$ donc $\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\dfrac{2n-1}{2n+2}\right) = \ln\left(\dfrac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = -\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

et enfin $\boxed{\ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\dfrac{3}{2n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right).}$

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante, continue et positive sur $[1,+\infty[$, un résultat du programme corollaire à la comparaison série-intégrale nous dit que $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série convergente (avec $n \geqslant 2$). Appelons ℓ sa somme.

On a alors $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} w_n = \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t} - \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n} = \ln N - \ln 1 - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Ainsi, en notant $\gamma = 1-\ell$, on obtient $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \underset{N\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).}$

c) D'une part, en tant que somme télescopique, on a déjà

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln(v_N) - \ln(v_1) = \ln v_N - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln v_N + \ln 2$$

d'après la question 3.a.

D'autre part, avec la question 4.a, en notant $t_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right) + \dfrac{3}{2n}$, on a $|t_n| = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison de séries à termes généraux positifs, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum t_n$ est absolument convergente donc convergente vers un réel S et $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} t_n = S + \mathrm{o}(1)$.

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} + S + \mathrm{o}(1) = -\frac{3}{2}\ln(N-1) - \frac{3}{2}\gamma + S + \mathrm{o}(1)$ d'où finalement $\ln v_N = -\dfrac{3}{2}\ln(N-1) + a_n$ où $a_n \to -\dfrac{3}{2}\gamma + S - \ln 2$.

Finalement, $v_N = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\ln(N-1)+a_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{a_n}}{N^{\frac{3}{2}}}$ et $\boxed{v_N \sim \dfrac{k}{N^{\frac{3}{2}}}}$ où $k = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma + S - \ln 2} > 0$, par continuité de l'exponentielle.

d) Soit $n \geqslant 2$. Comme $v_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n+2} v_n$, $(2n+2)\,v_{n+1} = (2n-1)\,v_n$ et on a bien

$$\boxed{v_{n+1} = (2n-1)\,v_n - (2n+1)\,v_{n+1}.}$$

Alors, la série $\sum v_n$ étant effectivement convergente par comparaison à une série de Riemann vu la question précédente, mais aussi par télescopage vu ce qui précède, la question précédente permettant de voir que $(2n-1)\,v_n \sim \dfrac{2k}{\sqrt{n}}$ donc $(2n-1)\,v_n \to 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v_1 + v_2 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n+1} = v_1 + v_2 + \sum_{n=2}^{+\infty}\Big((2n-1)\,v_n - (2(n+1)-1)\,v_{n+1}\Big) = v_1 + v_2 + 3v_2 = v_1 + 4v_2$$

Et comme $v_1 = P(U_1) = \dfrac{1}{2}$ (question 3.a) et $v_2 = P(U_2) = \dfrac{1}{2\times 4} = \dfrac{1}{8}$ (question 3.f), on obtient $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = 1.}$

Comme les U_n sont deux à deux disjoints, $P\left(\displaystyle\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = 1$.

On en déduit qu' $\boxed{\text{il est presque sûr que notre piéton passe par la droite } \Delta.}$