

## BILAN DU DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N°7

---

Bilan du DS que je n'ai pas eu le temps faire en cours :

**Exercice** : Marche aléatoire, thème très classique, à savoir faire.

Python est en général bien fait.

Bien lire l'énoncé pour les données attendues en sortie.

Il fallait voir que les nombres de trajets se calculaient avec des coefficients binomiaux, sinon c'était compliqué pour la suite...

- Pour 3.c, la première partie de la question n'était pas dans le sujet initial : assez facile à voir en faisant un dessin. Voir le corrigé. (Rarement bien fait).
- Pour 4.a : il faut que les o et les O soit distinguables.... et ne pas écrire n'importe quoi pour arriver au résultat de l'énoncé.
- 4.b : INCONTOURNABLE. A savoir faire, plein de méthodes différentes possibles.... Déjà vu.
- 4.c : Rappel : on ne compose pas des équivalents par des fonctions, même continues. Question pas si simple à bien rédiger.

**Problème** : INCONTOURNABLE : la fonction  $\Gamma$  et sa log-convexité.

• **Partie 1**

1.  $\triangleleft$  La convexité ne dépend pas de  $x$ ,  $y$  et/ou  $t$  fixé à l'avance (il faut les faire varier).
2. On ne « passe » pas à l'exponentielle. On compose par la fonction, et on précise qu'elle est croissante. La convexité de  $\exp$  ou la concavité de  $\ln$  sont faciles, mais à justifier en début de problème.

• **Partie 2** : so classique....

3. Attention, il y en un problème en 0. Résolu par équivalent. Encore et toujours, ne pas oublier la continuité....
4. Pas si simple en 0 : un équivalent ne suffit plus, prendre  $\alpha$  dans  $]1 - x, 1[$  et dire que la fonction est  $o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ...
5. L'idée était d'amener vers la domination pour la question 6. Il était ainsi plus raisonnable de garder l'exponentielle dans b) pour l'intégrabilité (mais n'a pas été pénalisé). Écrire  $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$  était apprécié....

• **Partie 3** : Carrément incontournable

6. A SAVOIR ABSOLUMENT RÉDIGER PARFAITEMENT. Connaître les hypothèses, savoir les rédiger, savoir rédiger en particulier la domination, pas si simple : PROUVER que la dominatrice est CPM et intégrable!!!
7. Pas d'IPP en dehors de SEGMENTS. Merci. (Contrairement aux changements de variables).
8. Bien traité.
9. Classique, bien fait. Le plus simple est la dérivée seconde, mais la définition passe aussi surtout avec la question 2.
10. Positivité améliorée incontournable, mais elle doit être JUSTIFIÉE.

11. Pas si simple sans indication, et même avec l'indication en l'infini, il faut justifier que  $\Gamma$  est croissante à partir d'un moment (par exemple de 2), dire que  $\Gamma(n) = (n-1)!$  ne suffit pas. Il faut aussi justifier que  $\Gamma(x+1)$  tend vers  $\Gamma(1)$  en 0.
- **Partie 4** : La log-convexité, plutôt classique
12. Easy. Une fonction affine est à la fois concave et convexe. Ces deux notions ne s'excluent donc pas mutuellement!!!!
13. Pas compliqué (et vu en TD), inutile de chercher compliqué pour le contre-exemple.
14. Vraiment incontournable pour les Centraliens-Mineurs...
- Il y avait une erreur d'énoncé,  $E$  n'est pas stable par produit (par exemple  $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{x}}$  est dans  $E$  mais pas  $f^2$ ...) mais si  $f, g$  dans  $E$ , alors  $fg$  est intégrable : à savoir montrer (classique) et sert à montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -ev et que  $(f|g)$  est bien défini.
- Pour le ps, détaillez la bilinéarité et la symétrie pour montrer au correcteur que vous connaissez. Pour Cauchy-Schwarz, les fonctions ne sont pas si évidente à trouver : il faut l'avoir vu! Puis passer par la dérivée seconde de  $\ln(\Gamma)$ .
15. Là c'est nettement plus facile. Se laisser bercer par les questions.
16. On utilise évidemment 15.
- **Partie 5** : Réciproque de ce qui précède.
17. Facile comme  $\Gamma$ .
18. Penser aux pentes des cordes...
19. Conséquence de 18.
20. a) Inégalité de convexité un peu déguisée, mais peut se voir avec une étude de fonction. En fait l'encadrement de 19 permettait directement de conclure (par encadrement) que
- $$u_n(x) \longrightarrow g(x).$$
21. Pas si simple car plusieurs cas à traiter.