DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N°7

CALCULATRICES INTERDITES

Exercice

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.

À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).

On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit ℓ un entier naturel non nul. Un trajet de ℓ étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et ℓ, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.

On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. À chaque trajet de ℓ étapes (ℓ est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$ définies par récurrence par :

- $x_0 = y_0 = 0$
- Pour $1 \leqslant k \leqslant \ell$, $(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1}+1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1}+1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$

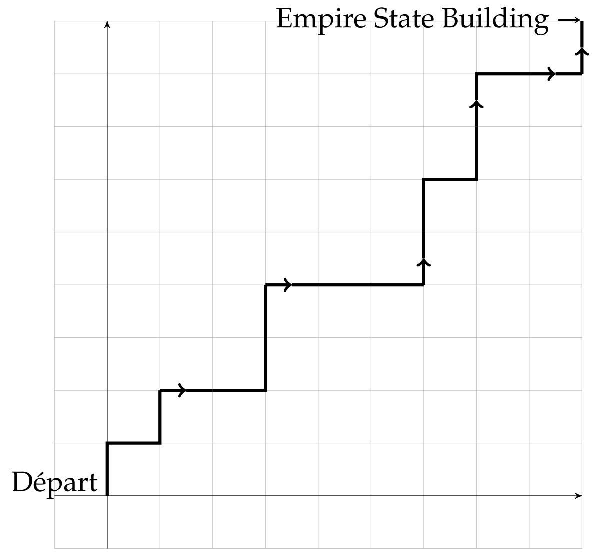
La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.

1. **a)** écrire en langage Python une fonction `deplacement(L, a, b)` dont la valeur est $(a, b+1)$ si $L =$ `"N"` et $(a+1, b)$ si $L =$ `"E"`.

b) écrire une fonction `chemin(m)` où `m` est une chaîne constituée des caractères `"N"` et `"E"` et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.

2. **a)** En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement ℓ étapes où $\ell \in \mathbb{N}^*$.

b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$.



Le trajet est (N, E, N, E, E, N, N, E, E, E, N, N, E, N, N, E, E, N)

FIGURE 1 – Exemple de trajet de 18 étapes.

c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0, 0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'évènement « Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$. » On pourra noter N_k l'évènement « à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord » et E_k l'évènement « à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est. »

a) Calculer la probabilité de l'évènement U_1.

b) Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geqslant 2$.

c) Soit $n \geqslant 2$. Justifier brièvement que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$. En déduire le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n, n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$$

puis que

$$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$

4. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$.

a) Déterminer le réel a tel que :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$

c) En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire ?

Problème

Partie 1 : 1er préliminaire

1. Rappeler la définition d'une fonction convexe.

2. Soient a et b des réels strictement positifs. Soit $\theta \in]0, 1[$. Démontrer l'inégalité

$$a^\theta b^{(1-\theta)} \leqslant \theta a + (1-\theta) b.$$

Partie 2 : 2e préliminaire

Soit x un nombre réel strictement positif. Soient u et v deux nombres réels tels que $0 < u < v$.

3. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

4. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\, t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

5. On suppose que $x \in [u, v]$.

a) Justifier que $\left|(\ln t)^2 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant (\ln t)^2 t^{u-1} \mathrm{e}^{-t}$, pour tout t dans $]0, 1]$.

b) Proposer une majoration semblable, uniforme en x, de $\left|(\ln t)^2 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\right|$, pour tout t dans $[1, +\infty[$.

Partie 3 : La fonction Γ

On peut donc définir la fonction Γ de la variable réelle x strictement positive en posant

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

6. Montrer que Γ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter sous forme intégrale sa dérivée et sa dérivée seconde.

7. Démontrer l'égalité

$$\forall\, x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

8. Calculer la valeur de $\Gamma(1)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Justifier que la fonction Γ est convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

10. Justifier que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.

11. Déterminer les limites de Γ aux bornes de son intervalle de définition.
On pourra commencer par chercher un équivalent en 0^+.

Partie 4 : ln-convexité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f, définie sur l'intervalle I et à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$, est dite ln-*convexe* si

$$\forall (x,y)\in I^2,\quad \forall \theta\in[0,1],\quad \ln(f(\theta x+(1-\theta)y))\leqslant \theta\ln(f(x))+(1-\theta)\ln(f(y)).$$

La fonction f est donc ln-convexe si et seulement si $\ln(f)$ est convexe.

Les questions 12, 13, 14 sont indépendantes.

12. Soit c un nombre réel. Justifier le fait que la fonction $x\mapsto e^{cx}$ est ln-convexe sur $\mathbb{R}$.

13. Soit f une fonction de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$ ln-convexe. Démontrer que f est convexe. La réciproque est-elle vraie ? Si oui, on justifiera précisément sa réponse et si non, on donnera un contre-exemple.

14. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues dont le carré est intégrable sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles ($f\in E$ si et seulement si $f\in\mathscr{C}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et f^2 est intégrable sur $]0,+\infty[$.) On pose, pour $f,g\in E$, $(f|g)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

- **a)** Montrer que si $f,g\in E$, alors fg est intégrable sur $]0,+\infty[$ puis que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- **b)** Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur E.
- **c)** En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\left(\Gamma'\right)^2\leqslant\Gamma\times\Gamma''$ sur $]0,+\infty[$.
- **d)** Montrer la ln-convexité de Γ sur $]0,+\infty[$.

15. **Une condition suffisante** : Soit f une fonction de l'intervalle I à valeurs dans l'intervalle $]0,+\infty[$. On suppose que, pour tout nombre réel c strictement positif, la fonction g_c définie pour x dans I par $g_c(x)=e^{cx}f(x)$ est convexe.

Soient x,y dans I et θ dans $]0,1[$.

- **a)** Justifier que $f(\theta x+(1-\theta)y)\leqslant\theta e^{c(1-\theta)(x-y)}f(x)+(1-\theta)e^{c\theta(y-x)}f(y)$.
- **b)** Soit H la fonction définie pour c dans $\mathbb{R}^+$ par

$$H(c)=\theta e^{c(1-\theta)(x-y)}f(x)+(1-\theta)e^{c\theta(y-x)}f(y).$$

  - i. Déterminer la limite de $H(c)$ lorsque c tend vers $+\infty$.
  - ii. On admet que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et un calcul élémentaire qu'on ne demande pas de faire montre que sa fonction dérivée H' s'annule en un unique nombre réel c_0 en changeant de signe, le nombre c_0 vérifiant la relation

$$e^{c_0(x-y)}=\frac{f(y)}{f(x)}.$$

    Démontrer que $H(c_0)=f(x)^\theta f(y)^{(1-\theta)}$.
  - iii. Établir le tableau de variations de H. Que représente le point c_0 pour la fonction H ?
- **c)** Justifier que f est ln-convexe.

16.
- **a)** Soient c et θ des nombres réels strictement positifs. On note $\varphi_{c,\theta}$ la fonction de la variable réelle x définie pour x dans $]0,+\infty[$ par

$$\varphi_{c,\theta}(x)=\theta^{x-1}e^{-\theta}e^{cx}.$$

  Démontrer que $\varphi_{c,\theta}$ est convexe sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
- **b)** Retrouver le fait que la fonction Γ est ln-convexe sur $]0,+\infty[$.

Partie 5 : Théorème de Bohr-Mollerup

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ telle que

- g est une fonction ln-convexe
- $\forall x\in]0,+\infty[,\quad g(x+1)=xg(x)$
- $g(1)=1$

On pose $G=\ln g$.

17. Exprimer $g(n)$ en fonction de l'entier naturel $n\geqslant 1$.

18. Soient x dans $]0,1[$ et n dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

- **a)** Justifier les inégalités

$$G(n)-G(n-1)\leqslant\frac{G(x+n)-G(n)}{x}\leqslant G(n+1)-G(n).$$

- **b)** En déduire que $(n-1)^x(n-1)!\leqslant g(x+n)\leqslant n^x(n-1)!$.

Soit n dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et soit x dans $]0,1]$. On pose

$$u_n(x)=\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}.$$

Soit x dans $]0,1[$.

19. Démontrer pour un entier $n>2$

$$\frac{n-1}{x+n-1}u_{n-1}(x)\leqslant g(x)\leqslant u_n(x).$$

20. On se propose de démontrer que la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ converge vers $g(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **a)** Soit α dans $]0,+\infty[$. Justifier que $(1+\alpha)^x-1\leqslant\alpha x$.
- **b)** Étudier le sens de variation de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$.
- **c)** Conclure.

21. En déduire que $g=\Gamma$.