

On remarque que toutes les variables aléatoires prennent un nombre fini de valeurs. Il n'y a donc pas de problème d'existence pour les espérances. Je n'évoquerai donc plus cela.

I. Fonction caractéristique

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $\mathbb{E} \left(\exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\cos \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) + i \mathbb{E} \left(\sin \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right)$.

La variable aléatoire $\cos \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right)$ est constante égale à $\cos \left(\frac{t}{2^k} \right)$ car \cos est paire.

Selon la formule de transfert, on a :

$$\mathbb{E} \left(\sin \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) = \sin \left(\frac{t}{2^k} \right) \mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) + \sin \left(\frac{-t}{2^k} \right) \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \frac{\sin \left(\frac{t}{2^k} \right) - \sin \left(\frac{t}{2^k} \right)}{2} = 0$$

donc $\mathbb{E} \left(\exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\cos \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) + i \mathbb{E} \left(\sin \left(t \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right) = \mathbb{E} \left(\cos \left(\frac{t}{2^k} \right) \right) + 0i = \cos \left(\frac{t}{2^k} \right)$

On a $e^{itX_n} = \prod_{k=1}^n \exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right)$ or selon le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right)$ ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) sont mutuellement indépendantes.

Ainsi $\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left(\exp \left(it \frac{\varepsilon_k}{2^k} \right) \right)$ d'après le résultat admis par l'énoncé.

On peut alors conclure que $\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{t}{2^k} \right)$

2. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que : $\forall u \in \mathbb{R}, \sin \left(\frac{t}{2^p} \right) \prod_{k=1}^p \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) = \frac{\sin(t)}{2^p}$

Initialisation : Pour $p = 0$, le produit vaut 1 et $2^0 = 1$ donc on a bien l'égalité voulue car $\sin(t) = \sin(t)$

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété au rang p .

Soit $u \in \mathbb{R}$. On a $\sin \left(\frac{u}{2^{p+1}} \right) \prod_{k=1}^{p+1} \cos \left(\frac{u}{2^k} \right) = \left(\sin \left(\frac{u/2}{2^p} \right) \prod_{k=1}^p \cos \left(\frac{u/2}{2^k} \right) \right) \cos \left(\frac{u}{2} \right)$

Ainsi avec l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sin \left(\frac{u}{2^{p+1}} \right) \prod_{k=1}^{p+1} \cos \left(\frac{u}{2^k} \right) = \frac{\sin \left(\frac{u}{2} \right)}{2^p} \cos \left(\frac{u}{2} \right) = \frac{2 \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos \left(\frac{u}{2} \right)}{2^{p+1}} = \frac{\sin(u)}{2^{p+1}}$$

Ce qui prouve l'hérédité.

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}, \sin \left(\frac{t}{2^p} \right) \prod_{k=1}^p \cos \left(\frac{t}{2^k} \right) = \frac{\sin(t)}{2^p}$

On peut conclure que $\sin \left(\frac{t}{2^n} \right) \Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Premier cas : si $t \neq 0$: Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $\frac{t}{2^n} \rightarrow 0$ et pour n assez grand, on a $0 < \left| \frac{t}{2^n} \right| < \pi$

donc $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \sim \frac{t}{2^n}$ ainsi pour n assez grand, $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$

donc $\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$ et $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \sim t$

d'où $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \rightarrow t$ puis $\Phi_{X_n}(t) \rightarrow \text{sinc}(t)$

Deuxième cas : si $t = 0$: On a $\Phi_{X_n}(0) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{0}{2^k}\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = \text{sinc}(0)$

On peut conclure que la suite de fonctions $(\Phi_{X_n})_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers sinc

4. sinc est continue sur l'ouvert \mathbb{R}^* par produit des fonctions continues sin et inverse

Quand $t \rightarrow 0$, on a $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \sim \frac{t}{t} = 1$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} \text{sinc}(t) = 1 = \text{sinc}(0)$ donc sinc est continue en 0

Ainsi sinc limite simple sur \mathbb{R} de la suite (Φ_{X_n}) est continue sur \mathbb{R}

5. **Lemme** Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes réelles sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X \sim -X$ et $Y \sim -Y$.

On note $S = X + Y$. On a alors $S \sim -S$.

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On a

$$(S = \sigma) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \left((X = x) \cap (Y = \sigma - x) \right)$$

Comme il s'agit d'une réunion disjointe dénombrable et par indépendance des variables aléatoires :

$$\mathbb{P}(S = \sigma) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\left((X = x) \cap (Y = \sigma - x) \right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = \sigma - x)$$

Je note $I = X(\Omega) \cap (-X)(\Omega)$ de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in I \iff -x \in I \text{ et } \forall x \in X(\Omega) \setminus I, \mathbb{P}(X = x) = 0 = \mathbb{P}(X = -x)$$

car $X \sim -X$ et on a ainsi

$$\mathbb{P}(S = \sigma) = \sum_{x \in I} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = \sigma - x)$$

$$\mathbb{P}(S = -\sigma) = \sum_{x \in I} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = -\sigma - x) = \sum_{x \in I} \mathbb{P}(X = -x) \mathbb{P}(Y = \sigma + x)$$

car $Y \sim -Y$.

Comme il s'agit d'une famille sommable, et que l'application $t \mapsto -t$ est bijective de I vers I , on a :

$$\mathbb{P}(S = -\sigma) = \sum_{x' \in I} \mathbb{P}(X = x') \mathbb{P}(Y = \sigma - x') = \mathbb{P}(S = \sigma)$$

Ce qui prouve que $S \sim -S$

La preuve On procède par récurrence.

Pour l'initialisation, on remarque $X_1 = \varepsilon_1/2$ a même loi que $-X_1 = -\varepsilon_1/2$.

Pour l'hérédité, on utilise le lemme pour $X_{n+1} = X_n + \frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}$ l'indépendance de X_n et de $\frac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}$ provenant du lemme des coalitions.

Ainsi on peut conclure que X_n et $-X_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a $\Phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(\exp(itX_n)) = \mathbb{E}(\cos(tX_n)) + i\mathbb{E}(\sin(tX_n))$

or $X_n \sim -X_n$ donc $\mathbb{E}(\sin(tX_n)) = \mathbb{E}(\sin(-tX_n)) = -\mathbb{E}(\sin(tX_n))$

donc $\mathbb{E}(\sin(tX_n)) = 0$ et $\Phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(\cos(tX_n)) = \varphi_n(t)$ ainsi $\varphi_n = \Phi_{X_n}$.

En utilisant 3, on conclut que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers sinc sur \mathbb{R}

7. Par l'absurde, on suppose que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R} .

Alors la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers sa limite simple qui est sinc.

À partir d'un certain rang n_0 , on a pour $n \geq n_0$ la fonction $\varphi_n - \text{sinc}$ est bornée. et en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur \mathbb{R} on a

$$\|\varphi_n - \text{sinc}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On peut également remarquer que les fonctions φ_n et sinc sont bornées sur \mathbb{R} .

On considère la suite définie par $u_n = 2^{n+1}\pi$.

On a $\varphi_n(u_n) = \Phi_{X_n}(u_n) = \prod_{k=1}^n \cos(2^{n-k}2\pi) = 1$ et $|\text{sinc}(u_n)| = \left| \frac{\sin(u_n)}{u_n} \right| \leq \frac{1}{u_n}$

quand $n \rightarrow +\infty$, on a $u_n \rightarrow +\infty$ donc $\text{sinc}(u_n) \rightarrow 0$ d'où

$$|\varphi_n(u_n) - \text{sinc}(u_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

or on a $|\varphi_n(u_n) - \text{sinc}(u_n)| \leq \|\varphi_n - \text{sinc}\|_\infty$

donc par passage à la limite, on a $1 \leq 0$ ce qui est absurde

ainsi La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}

II. Ecriture binaire

8. Soit $x = (x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$. On a $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $n - j \in \mathbb{N}$.

Comme \mathbb{N} est stable par l'addition, la multiplication et l'exponentiation, alors $\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} \in \mathbb{N}$ (i)

puis comme $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j \leq 1$ et $2^{n-j} \geq 0$, on a :

$$\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} \leq \sum_{j=1}^n 2^{n-j} \leq 2^{n-1} \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)} = 2^n (1 - (1/2)^n) = 2^n - 1 \quad (ii)$$

On a reconnu une somme géométrique de raison $1/2 \in [0, 1[$

Ainsi avec (i) et (ii), on a $\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$

Ainsi Φ_n est bien définie

9. Il est clair que $\boxed{\text{Im}(\Phi_n) = A_n}$ En revanche la notation Im me semble réservée pour les morphismes en algèbre. j'écrirais plutôt : $\Phi_n(\{0, 1\}) = A_n$

10. **Récurrence forte et finie** On montre par récurrence finie sur $k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ que $k \in \text{Im}(\Phi_n)$

Initialisation : On a $0 = \sum_{j=1}^n 0 \times 2^{n-j} = \Phi_n(\tilde{0}_n)$ où $\tilde{0}_n$ est la suite finie nulle.

Ainsi $0 \in \text{Im}(\Phi_n)$ ce qui est l'initialisation.

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 1, 2^n - 1 \rrbracket$. On suppose que $\forall p \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket, p \in \text{Im}(\Phi_n)$. Montrons $k \in \text{Im}(\Phi_n)$.

La division euclidienne de k par 2 nous fournit $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1\}$ tels que $k = 2q + r$

On remarque que $0 \leq q \leq k/2 < k$ car $k \in \mathbb{N}^*$ et donc $q \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$

Ceci nous fournit $(y_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$ tel que $q = \sum_{j=1}^n y_j 2^{n-j}$

De plus $q \leq k/2 \leq 2^{n-1} - 1/2 < 2^{n-1}$ donc $y_1 = 0$

Je définis alors $(x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$ par $x_n = r$ et $\forall j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, x_j = y_{j+1}$, de sorte que :

$$\sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j} = \sum_{j=1}^{n-1} y_{j+1} 2^{n-j} + x_n 2^0 = \sum_{i=2}^n y_i 2^{n-i+1} + r = \sum_{j=1}^n y_j 2^{n-j+1} + r = 2 \sum_{j=1}^n y_j 2^{n-j} + r = 2q + r$$

Ainsi $k = \Phi_n((x_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}) \in \text{Im}(\Phi_n)$

Conclusion : On a bien montré par récurrence que $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket, k \in \text{Im}(\Phi_n)}$

Récurrence finie avec un successeur Pour cette récurrence, l'initialisation est la même mais l'hérédité est

plus laborieuse car on passe de k à $k + 1$. Il faut donc avec l'écriture binaire de $k = \sum_{j=1}^n y_j 2^{n-j} \in \llbracket 0, 2^n - 2 \rrbracket$

prouver l'existence de j_0 maximum des j tel que $y_j = 0$

On pose alors $x_{j_0} = 1$ et pour $j < j_0, x_j = 0$ et pour $j > j_0, x_j = y_j$.

Puis on prouve que $k + 1 = \sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j}$ (facile mais pas drôle)

Récurrence infinie avec un successeur

On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket, k \in \text{Im}(\Phi_n)$.

L'initialisation se fait sans problème pour $n = 1$ (fonction identité).

Pour l'hérédité, on suppose vrai la propriété pour n et on prend $k \in \llbracket 0, 2^{n+1} - 1 \rrbracket$.

Si $k \leq 2^n - 1$, on utilise l'hypothèse de récurrence avec k puis on décale les indices et on rajoute $x_1 = 0$.

Si $k > 2^n - 1$, on utilise l'hypothèse avec $k - 2^n$ puis on décale les indices et on rajoute $x_1 = 1$.

11. On montre en 8 que l'application $\Phi_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ est bien définie puis qu'elle est surjective en 10 de plus, on a $|\{0, 1\}^n| = 2^n = |\llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket|$. Ainsi $\boxed{\Phi_n \text{ est bijective}}$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in D_n$. On peut alors trouver $(y_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \{0, 1\}^n$ tel que $k = \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{2^j}$

On définit alors $(x_j)_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \in \{0, 1\}^{n+1}$ par $x_{n+1} = 0$ et $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = y_j$.

de sorte que $k = \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{2^j} + 0 = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} \in D_{n+1}$

On vient de montrer que $D_n \subset D_{n+1}$ et donc $\boxed{\text{la suite } (D_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante au sens de l'inclusion}}$

Soit $k \in \mathbb{D}$. Ceci nous fournit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \in \mathbb{D}_n$ puis $(x_j)_{j \in [1, n]} \in \{0, 1\}^n$ tel que $k = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j}$.

Comme en 8, on a $0 \leq k \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 1 - (1/2)^n < 1$

d'où $0 \leq k < 1$. On a bien vérifié que $\mathbb{D} \subset [0, 1[$

13. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. On a $\lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1$ par définition de la partie entière.

Par division par $2^n > 0$, on obtient $\pi_n(x) \leq x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$

14. Soit $x \in [0, 1[$ et $k \in \mathbb{N}$. On a par définition des π_j et puis par télescopage :

$$\sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^k 2^j \frac{(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x))}{2^j} = \pi_k(x) - \pi_0(x)$$

Or $\pi_0(x) = \frac{\lfloor 2^0 x \rfloor}{2^0} = \lfloor x \rfloor = 0$ car $0 \leq x < 1$. D'où $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j}$

15. En posant $A = 2^j x$, on a $d_j(x) = \lfloor 2A \rfloor - 2 \lfloor A \rfloor \in \mathbb{Z}$.

On a $\lfloor A \rfloor \leq A < \lfloor A \rfloor + 1$ donc $2 \lfloor A \rfloor \leq 2A < 2 \lfloor A \rfloor + 2$

d'où $2 \lfloor A \rfloor \leq \lfloor 2A \rfloor < 2 \lfloor A \rfloor + 2$ et donc $0 \leq d_j(x) < 2$ ainsi $d_j(x) \in \{0, 1\}$

16. \Rightarrow : On suppose que $x \in \mathbb{D}_n$.

On peut alors écrire $2^n x = \sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j}$ avec $(x_j)_{j \in [1, n]} \in \{0, 1\}^n$

Ainsi $2^n x = \Phi_n((x_j)_{j \in [1, n]}) \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ (vu en 8)

\Leftarrow : On suppose que $2^n x \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$

Comme $\Phi_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ est une bijection d'après 11 (ou 10),

cela nous fournit $(x_j)_{j \in [1, n]} \in \{0, 1\}^n$ tel que $2^n x = \Phi_n((x_j)_{j \in [1, n]}) = \sum_{j=1}^n x_j 2^{n-j}$

donc $x = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j} \in \mathbb{D}_n$

On a bien l'équivalence $x \in \mathbb{D}_n \iff 2^n x \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$

17. L'application $\Psi_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{D}_n$ est bien définie est surjective par définition de \mathbb{D}_n

D'après 16, $\mathbb{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket \right\}$ et l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{t}{2^n} \in \mathbb{R}$ est bijective

Ainsi $|\mathbb{D}_n| = 2^n = |\{0, 1\}^n|$ et l'application Ψ_n est bien bijective

18. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a $d_i(x) = \lfloor 2^i x \rfloor - 2 \lfloor 2^{i-1} x \rfloor$ (comme en 15).

On pose pour $j \geq n+1$, $x_j = 0$ de sorte que $x = \sum_{j=1}^N \frac{x_j}{2^j}$ pour tout entier $N \geq n$.

On a $2^i x = \sum_{j=1}^n \frac{2^i x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^i \frac{2^i x_j}{2^j} + \sum_{j=i+1}^n \frac{2^i x_j}{2^j}$ en prenant comme convention $\sum_{j=i+1}^n \frac{2^i x_j}{2^j} = 0$ si $i \geq n$

Si $n \geq i+1$, on a $0 \leq \sum_{j=i+1}^n \frac{2^i x_j}{2^j} \leq \sum_{j=i+1}^n \frac{2^i}{2^j} = \frac{2^i}{2^{i+1}} \frac{1 - (1/2)^{n-i}}{1 - (1/2)} = 1 - (1/2)^{n-i} < 1$

dans tous les cas, on a : $\sum_{j=i+1}^n \frac{2^i x_j}{2^j} \in [0, 1[$ et $\sum_{j=1}^i \frac{2^i x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^i 2^{i-j} x_j \in \mathbb{N}$

d'où $\lfloor 2^i x \rfloor = \sum_{j=1}^i 2^{i-j} x_j$ et de même $\lfloor 2^{i-1} x \rfloor = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-1-j} x_j$

donc $d_i(x) = \sum_{j=1}^i 2^{i-j} x_j - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-1-j} x_j = 2^0 x_i = x_i$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^k \frac{x_j}{2^j}$ d'après 14 car $x \in D_n \subset [0, 1[$

Comme pour $j \geq n+1$, on a $x_j = 0$, on peut conclure que $\pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$

III. Développement dyadique, loi de composition

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les U_k sont presque sûrement à valeurs dans $\{0, 1\}$, alors Y_n est sûrement à valeurs dans D_n or $D_n \subset [0, 1[$

ainsi $(Y_n \in [0, 1[) = \Omega$ et donc $\mathbb{P}(Y_n \in [0, 1[) = 1$

20. **Lemme :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va montrer que pour tout $(x_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ et $(y_j)_{1 \leq j \leq n+1} \in \{0, 1\}^{n+1}$, on a l'équivalence :

$$\Psi_{n+1}((x_j)_{1 \leq j \leq n+1}) \leq \Psi_{n+1}((y_j)_{1 \leq j \leq n+1}) \iff \left(x_1 < y_1 \text{ ou } \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \Psi_n((x_{j+1})_{1 \leq j \leq n}) \leq \Psi_n((y_{j+1})_{1 \leq j \leq n}) \end{cases} \right)$$

On va faire cette preuve par disjonctions (exhaustives) de cas.

Premier cas si $x_1 < y_1$: Alors on a $x_1 = 0$ et $y_1 = 1$ Ainsi

$$\Psi_{n+1}((y_j)_{1 \leq j \leq n+1}) - \Psi_{n+1}((x_j)_{1 \leq j \leq n+1}) = \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{y_j - x_j}{2^j} \geq \frac{1}{2} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = (1/2)^{n+1} > 0$$

donc $\Psi_{n+1}((y_j)_{1 \leq j \leq n+1}) > \Psi_{n+1}((x_j)_{1 \leq j \leq n+1})$

Deuxième cas si $x_1 = y_1$ et $\Psi_n((x_{j+1})_{1 \leq j \leq n}) \leq \Psi_n((y_{j+1})_{1 \leq j \leq n})$: Alors

$$\Psi_{n+1}((y_j)_{1 \leq j \leq n+1}) - \Psi_{n+1}((x_j)_{1 \leq j \leq n+1}) = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{y_j}{2^j} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} = \Psi_n((y_{j+1})_{1 \leq j \leq n}) - \Psi_n((x_{j+1})_{1 \leq j \leq n}) \geq 0$$

donc $\Psi_{n+1}((y_j)_{1 \leq j \leq n+1}) \geq \Psi_{n+1}((x_j)_{1 \leq j \leq n+1})$

Troisième cas si $x_1 > y_1$: à l'aide du premier cas, on a : $\Psi_{n+1}((y_j)_{1 \leq j \leq n+1}) < \Psi_{n+1}((x_j)_{1 \leq j \leq n+1})$

Quatrième cas si $x_1 = y_1$ et $\Psi_n((x_{j+1})_{1 \leq j \leq n}) > \Psi_n((y_{j+1})_{1 \leq j \leq n})$:

à l'aide du deuxième cas, on a $\Psi_{n+1}((y_j)_{1 \leq j \leq n+1}) \leq \Psi_{n+1}((x_j)_{1 \leq j \leq n+1})$

Propriété : On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : pour tout choix de la suite (U_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, en posant Y_n et F_n comme ci-dessus on a : $\forall x \in D_n, F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$

Initialisation : Pour $n = 1$, On a $Y_1 = U_1/2$ et $D_1 = \{0, 1/2\}$

$$\text{On a } F_1(0) = \mathbb{P}(U_1/2 \leq 0) = \mathbb{P}(U_1 = 0) = 1/2 = 0 + \frac{1}{2^1}$$

$$\text{et } F_1(1/2) = \mathbb{P}(U_1/2 \leq 1/2) = \mathbb{P}(U_1 \leq 1) = 1 = 1/2 + \frac{1}{2^1}$$

$$\text{On a bien pour } n = 1 : \forall x \in D_n, F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang n .

Soit $x \in D_{n+1}$. On peut écrire $x = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{1 \leq j \leq n+1} \in \{0, 1\}^{n+1}$.

Ainsi d'après le lemme de comparaison :

$$(Y_{n+1} \leq x) = \left(U_1 = x_1, \sum_{j=2}^{n+1} \frac{U_j}{2^j} \leq \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} \right) \cup (U_1 < x_1)$$

Par réunion disjointe puis par indépendance avec le lemme des coalitions, on a :

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} \leq x) = \mathbb{P}(U_1 = x_1) \mathbb{P}\left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{U_j}{2^j} \leq \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}\right) + \mathbb{P}(U_1 < x_1)$$

Je note $x' = 2 \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{2^{k+1}} = \sum_{j=1}^n \frac{x_{j+1}}{2^j} \in D_n$ et on a $\left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{U_j}{2^j} \leq \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}\right) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{U_{j+1}}{2^j} \leq x'\right)$

On a $\mathbb{P}(U_1 = x_1) = 1/2$ et on peut appliquer l'hypothèse à la suite $(U_{k+1})_{k \geq 1}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{U_j}{2^j} \leq \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n \frac{U_{j+1}}{2^j} \leq x'\right) = x' + \frac{1}{2^n} \text{ par hypothèse de récurrence}$$

Si $x_1 = 0$, on a $\mathbb{P}(U_1 < x_1) = 0$ et si $x_1 = 1$, on a $\mathbb{P}(U_1 < x_1) = 1/2$. Dans tous les cas $\mathbb{P}(U_1 < x_1) = \frac{x_1}{2}$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(Y_{n+1} \leq x) = \frac{1}{2} \left(x' + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{x_1}{2} = \frac{x_1}{2} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}} = x + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Ce qu'il fallait démontrer

Conclusion : On a bien montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_n, F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_n$.

Si $x = 0$, on a $G_n(0) = \mathbb{P}(Y_n < 0) = 0$ car $(Y_n \in [0, 1[)$ est presque sûr.

Si $x \neq 0$, alors : $\forall y \in D_n, y < x \iff y \leq x - \frac{1}{2^n}$ et $x - \frac{1}{2^n} \in D_n$ en utilisant 16

$$\text{Ainsi } (Y_n < x) = \left(Y_n \leq x - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\text{donc } G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n < x) = \mathbb{P}\left(Y_n \leq x - \frac{1}{2^n}\right) = F_n\left(x - \frac{1}{2^n}\right) = x - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}$$

Dans tous les cas, on a $G_n(x) = x$

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in D_n$. On a $(Y_n = x) \cup (Y_n < x) = (Y_n \leq x)$ (réunion disjointe) donc

$$\mathbb{P}(Y_n = x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) - \mathbb{P}(Y_n < x) = F_n(x) - G_n(x) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{|D_n|}$$

Ainsi pour tout entier naturel non nul n , Y_n suit une loi uniforme sur D_n

23. *Remarque : il est sans doute possible de faire une preuve moins formalisée.*

En utilisant 14 et regardant la preuve de 18, on voit que $\forall x \in D_n$, $x = \pi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{d_k(x)}{2^k}$

Je pose alors $V_k = d_k(X_n)$ et on a bien $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{2^k}$

On remarque que $\forall x \in D_n$, $\Psi_n^{-1}(x) = (d_1(x), \dots, d_n(x))$ ainsi je note $W = \Psi_n^{-1}(X_n) = (V_1, \dots, V_n)$.

Comme X_n suit une loi uniforme sur D_n et que $\Psi_n : \{0, 1\}^n \rightarrow D_n$ bijective alors W suit une loi uniforme sur $\{0, 1\}^n$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. V_j est alors presque sûrement à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Soit $\varepsilon \in \{0, 1\}$. On a

$$\mathbb{P}(V_j = \varepsilon) = \mathbb{P}(W \in \{(v_1, \dots, v_n) \in \{0, 1\}^n \mid v_j = \varepsilon\}) = \frac{|\{(v_1, \dots, v_n) \in \{0, 1\}^n \mid v_j = \varepsilon\}|}{|\{0, 1\}^n|} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $V_j \sim \mathcal{B}(1/2)$

En faisant de même avec $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (V_i = \varepsilon_i)\right) = \frac{|\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\}|}{|\{0, 1\}^n|} = \frac{1}{2^n}$$

donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (V_i = \varepsilon_i)\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(V_j = \varepsilon_j)$;

ce qui prouve l'indépendance mutuelle des variables aléatoires V_1, \dots, V_n

Il existe bien des variables aléatoires V_1, \dots, V_n mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et telles que $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{V_k}{2^k}$

IV. Développement dyadique, étude asymptotique

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $Y_n \leq Y_{n+1}$ donc $(Y_{n+1} \leq x) \subset (Y_n \leq x)$ ainsi

$$F_{n+1}(x) = \mathbb{P}(Y_{n+1} \leq x) \leq \mathbb{P}(Y_n \leq x) = F_n(x)$$

ainsi les suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$ sont décroissantes (analogue pour $(G_n(x))$)

25. Soit $x \in \mathbb{R}$. les suites $(F_n(x))_{n \geq 1}$ et $(G_n(x))_{n \geq 1}$ sont décroissantes et minorées par 0. Elles sont donc convergentes.

On en déduit la convergence simple des suites de fonctions $(F_n)_{n \geq 1}$ et $(G_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbb{R}

26. Soit $x \in D$. Cela nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in D_N$.

D'après 11., on a alors $\forall n \geq N, x \in D_n$.

Ainsi d'après les questions 20 et 21, on a : $\forall n \geq N, F_n(x) = x + 1/2^n$ et $G_n(x) = x$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = x$

De plus d'après 18, les événements $(Y_n \leq 1)$ et $(Y_n < 1)$ sont presque sûrs

Ainsi $F_n(1) = \mathbb{P}(Y_n \leq 1) = 1 = G_n(1) = \mathbb{P}(Y_n < 1)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(1) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(1) = 1$

On a montré $\boxed{\forall x \in D \cup \{1\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = x}$

27. Je note F (respectivement G) les limites simples de (F_n) et de (G_n) sur \mathbb{R}

Soit $x \leq y$ dans $[0, 1]$. On a $F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) \leq \mathbb{P}(Y_n \leq y) = F_n(y)$ pour tout $n \geq 1$

Par passage à la limite, on a $F(x) \leq F(y)$ ainsi F est croissante sur $[0, 1]$.

On suppose que $x \neq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\pi_n(x) \leq x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$ d'après 13

De plus $\pi_n(x) \in D_n \subset D$ d'après 15 et 14

de plus avec 16, on a $\pi_n(x) + \frac{1}{2^n} \in D_n \cup \{1\} \subset D \cup \{1\}$

d'après la question précédente, on a donc $F(\pi_n(x)) = \pi_n(x)$ et $F\left(\pi_n(x) + \frac{1}{2^n}\right) = \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$

En utilisant la croissance de F on a $\pi_n(x) \leq F(x) \leq \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$

Donc $|\pi_n(x) - x| \leq \frac{1}{2^n}$ et $|\pi_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ donc $|F(x) - x| \leq \frac{2}{2^n}$

Comme $\frac{2}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on conclut que $F(x) = x$ et pour $G(x) = x$ c'est analogue.

On a montré $\boxed{\forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = x}$

28. On considère un intervalle non vide $I \subset [0, 1]$. Je note $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

On commence par un premier cas : $I = [a, b] \subset [0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $(Y_n \in I) = (Y_n \leq b) \setminus (Y_n < a)$. Comme $(Y_n < a) \subset (Y_n \leq b)$, on a

$$\mathbb{P}(Y_n \in I) = \mathbb{P}(Y_n \leq b) - \mathbb{P}(Y_n < a) = F_n(b) - G_n(a)$$

Par passage à la limite, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n \in I) = F(b) - G(a) = b - a = \sup I - \inf I$

De même on trouve

$$\mathbb{P}(Y_n \in]a, b]) = G_n(b) - F_n(a); \mathbb{P}(Y_n \in [a, b]) = G_n(b) - G_n(a) \text{ et } \mathbb{P}(Y_n \in]a, b]) = F_n(b) - F_n(a)$$

Dans tous les cas on conclut que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n \in I) = \ell(I) \text{ avec } \ell(I) = \sup I - \inf I}$

29. Sans le "En déduire" :

En utilisant la formule de transfert on a $\mathbb{E}(f(Y_n)) = \sum_{y \in D_n} f(y) \mathbb{P}(Y_n = y) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$.

En utilisant les sommes de Riemann (méthode des rectangles à gauche) avec la fonction continue f sur le segment $[0, 1]$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$$

Comme toute suites extraites d'une suite convergente, convergent vers la même limite,

$$\text{on a : } \boxed{\mathbb{E}(f(Y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f}$$

Avec le "En déduire" : Pour tout intervalle I de $[0, 1]$, on a

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_I(Y_n)) = \mathbb{P}(Y_n \in I) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell(I) = \int_0^1 \mathbf{1}_I$$

Pour g fonction en escaliers sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} ,

on peut écrire $g = \sum_{k=1}^N a_k \mathbf{1}_{I_k}$ où $N \in \mathbb{N}$, les I_k sont des intervalles de $[0, 1]$ et les $a_k \in \mathbb{R}$

$$\text{Comme } \mathbb{E}(g(Y_n)) = \sum_{k=1}^N a_k \mathbb{E}(\mathbf{1}_{I_k}(Y_n)) \text{ et } \int_0^1 g = \sum_{k=1}^N a_k \int_0^1 \mathbf{1}_{I_k}$$

Par linéarité, des limites des suites, de l'espérance et des intégrales, on a : $\mathbb{E}(g(Y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g$.

Soit f maintenant f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

Soit $\varepsilon > 0$.

Selon les théorèmes d'approximation uniforme du cours, on peut trouver g en escalier sur $[0, 1]$ tels que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon/3$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie prise sur les fonctions bornées à valeurs réelles sur $[0, 1]$.

D'après ce qui précède $\mathbb{E}(g(Y_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g$

ce qui nous fournit $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall n \geq N$, $\left| \mathbb{E}(g(Y_n)) - \int_0^1 g \right| \leq \varepsilon/3$.

Soit $n \geq N$.

On a $|f(Y_n) - g(Y_n)| \leq \varepsilon/3$ donc $|\mathbb{E}(f(Y_n)) - \mathbb{E}(g(Y_n))| = |\mathbb{E}(f(Y_n) - g(Y_n))| \leq \varepsilon/3$.

et $\left| \int_0^1 f - \int_0^1 g \right| \leq \int_0^1 |f - g| \leq \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon/3$ donc

$$\left| \mathbb{E}(f(Y_n)) - \int_0^1 f \right| \leq |\mathbb{E}(f(Y_n)) - \mathbb{E}(g(Y_n))| + \left| \mathbb{E}(g(Y_n)) - \int_0^1 g \right| + \left| \int_0^1 g - \int_0^1 f \right| \leq \varepsilon$$

On vient de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N \implies \left| \mathbb{E}(f(Y_n)) - \int_0^1 f \right| \leq \varepsilon$$

Ainsi pour toute fonction f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , $\boxed{\text{la suite } (\mathbb{E}(f(Y_n)))_{n \geq 1} \text{ converge vers } \int_0^1 f}$

30. Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère $(X_n)_n$ et $(\varepsilon_k)_k$ définies comme en I.

On pose pour $k \geq 1$, $U_k = \frac{1 + \varepsilon_k}{2}$ de sorte que (U_k) est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(1/2)$. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{2^k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $Y_n = \frac{1}{2} \left(X_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \right) = \frac{X_n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$

donc $X_n = 2Y_n - 1 + \frac{1}{2^n}$ et $\cos(tX_n) = \cos(2tY_n - t) \cos(t/2^n) - \sin(2tY_n - t) \sin(t/2^n)$ donc

$$\mathbb{E}(\cos(tX_n)) = \cos(t/2^n) \mathbb{E}(\cos(2tY_n - t)) - \sin(t/2^n) \mathbb{E}(\sin(2tY_n - t))$$

On a $\cos(t/2^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et $\sin(t/2^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

En utilisant les fonctions $x \mapsto \cos(2tx - t)$ et $x \mapsto \sin(2tx - t)$ qui sont bien continues sur $[0, 1]$, on a d'après le résultat précédent :

$$\mathbb{E}(\cos(2tY_n - t)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 \cos(2tx - t) dx \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\sin(2tY_n - t)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 \sin(2tx - t) dx$$

donc $\mathbb{E}(\cos(tX_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 \cos(2tx - t) dx$

Si $t = 0$, on a $\int_0^1 \cos(2tx - t) dx = \int_0^1 1 dx = 1 = \text{sinc}(0)$

Si $t \neq 0$, on a $\int_0^1 \cos(2tx - t) dx = \left[\frac{\sin(2tx - t)}{2t} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin(t) - \sin(-t)}{2t} = \text{sinc}(t)$

On retrouve bien $\boxed{\mathbb{E}(\cos(tX_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \text{sinc}(t)}$ obtenu à la question 6

31. La fonction $h : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$.

Quand $t \rightarrow 0$, on a $t-1 \rightarrow -1$ et $\ln(t) \rightarrow -\infty$ et ainsi $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$

Quand $t \rightarrow 1$, on a $\ln(t) \sim t-1$ donc $h(t) \sim 1$ et ainsi $\lim_{t \rightarrow 1} h(t) = 1$

donc h admet un prolongement continue sur $[0, 1]$

On en déduit $\boxed{\text{la convergence de } \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \int_0^1 h}$ (intégrale faussement impropre)

Soit $t \in]0, 1[$. En utilisant 29 avec la fonction $f : x \mapsto t^x$ qui est continue sur $[0, 1]$.

On trouve que $\mathbb{E}(t^{Y_n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 t^x dx$.

or $\int_0^1 t^x dx = \int_0^1 e^{x \ln(t)} dx = \left[\frac{e^{x \ln(t)}}{\ln(t)} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e^{\ln(t)} - e^0}{\ln(t)} = h(t)$

Je note $h_n : t \mapsto \mathbb{E}(t^{Y_n})$.

(i) On vient de voir que la suite de fonction $(h_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers h sur $]0, 1[$

(ii) De plus h est continue sur $]0, 1[$

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in]0, 1[$.

On a $h_n(t) = \mathbb{E}(t^{Y_n}) = \sum_{z \in D_n} t^z \mathbb{P}(Y_n = z) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} t^{j/2^n}$ par formule de transfert

ainsi h_n est continue sur $]0, 1[$.

(iV) Soit $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq t^{Y_n} \leq 1$ car Y_n est à valeur positives.

Ainsi on a l'hypothèse de domination :

$$\forall t \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |h_n(t)| = \mathbb{E}(t^{Y_n}) \leq 1$$

et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $]0, 1[$

Conclusion : Avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème de convergence dominée s'applique et on a l'existence des membres et l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \mathbb{E}(t^{Y_n}) dt = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\int_0^1 h_n = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_0^1 t^{j/2^n} dt = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{1}{1 + \frac{j}{2^n}}$$

or en utilisant les sommes de Riemann avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ continue sur $[0, 1]$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{1 + k/N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

d'où $\int_0^1 h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2)$ (suite extraite) et ainsi $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt = \ln(2)$

V. Dénombrabilité

32. On remarque que chaque ensemble D_n est fini de cardinal 2^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n$ est une réunion dénombrable d'ensemble fini, donc D est fini ou dénombrable.

Et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n \subset D$ donc D n'est pas fini d'où l'ensemble D est dénombrable

33. On considère $A = \{x \in \mathbb{N} / x \notin f(x)\}$. On a $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Soit a l'antécédent de A par f de sorte que $f(a) = A$

On a alors $a \in A \iff a \notin A$ ce qui est absurde.

Il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective

34. On considère $\varphi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Analyse : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $\mathbf{1}_A = \Phi(A) = \varphi$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = 1 \iff \mathbf{1}_A(n) = 1 \iff n \in A$

donc $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 1\}$ ce qui prouve l'unicité

Synthèse : Je pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 1\}$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $n \in A$, alors $\varphi(n) = 1 = \mathbf{1}_A(n)$

Si $n \notin A$, alors $\varphi(n) = 0 = \mathbf{1}_A(n)$

Ainsi φ et $\mathbf{1}_A : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \mathbf{1}_A(n)$

donc $\mathbf{1}_A = \varphi$ (existence)

Conclusion : On a montré que tout élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ avait un unique antécédent par Φ .

Ainsi l'application Φ est bijective

35. Soit $(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ étant à termes positifs, on a par calcul dans $[0, +\infty]$:

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 < +\infty$$

pour la majoration on a reconnu une série géométrique de raison $1/2 \in]-1, 1[$.

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ de somme $\Psi((x_n)_n) \in [0, 1]$.

d'où l'application Ψ est bien définie

Je prends les suites (y_n) et (z_n) définies par $y_0 = 0, z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = 1$ et $z_n = 0$

On a $(y_n) \neq (z_n)$ éléments de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $\Psi((y_n)_n) = 1/2 = \Psi((z_n)_n)$ (somme géométrique)

donc l'application Ψ n'est pas injective

Premier cas : soit $X = 1$. Je considère la suite $(x_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ constante égale 1.

On a alors $\Psi((x_n)_n) = 1 = X$

Deuxième cas : soit $X \in [0, 1[$. Je définis la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = d_{n+1}(X)$

D'après 15, on a $(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a selon 14,

$$\sum_{n=0}^N \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^N \frac{d_{n+1}(X)}{2^{n+1}} = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{d_j(X)}{2^j} = \pi_{N+1}(X)$$

or d'après 13, on a $\pi_{N+1}(X) \leq X < \pi_{N+1}(X) + \frac{1}{2^{N+1}}$ d'où

$$\left| X - \sum_{n=0}^N \frac{x_n}{2^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2^{N+1}}$$

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ de somme X .

Donc $X = \Psi((x_n)_n) \in \Psi(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$

Conclusion : On vient de montrer que $\forall X \in [0, 1], \exists x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \Psi(X) = x$

Ce qui signifie que Ψ est surjective

36. Propriétés préliminaires : On remarque les propriétés suivantes de Ψ et D :

- (i) D est stable par division par 2, $\forall x \in D, |2x - 1| \in D \cup \{1\}$
et $\forall x, y \in D, x + y < 1 \implies x + y \in D$
 - (ii) L'image d'une suite stationnaire à valeurs dans $\{0, 1\}$ par Ψ est à valeur dans $D \cup \{1\}$.
 - (iii) 1 (respectivement 0) n'a qu'un seul antécédent par Ψ qui est la suite constante égale à 1 (respectivement à 0).
 - (iv) Tout élément de $]0, 1[\setminus D^*$ admet un seul antécédent par Ψ qui n'est pas stationnaire.
 - (v) Chaque élément de D^* admet exactement deux antécédents par Ψ qui sont stationnaires l'une à 1 et l'autre à 0.
- À ce stade du sujet nous admettrons les trois premières propriétés.

Soit $x \neq y$ dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Psi(x) = \Psi(y)$.

On a alors l'existence de $i_0 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$ car toute partie non vide de \mathbb{N} admet un minimum. Sans perte de généralité, on suppose que $x_{i_0} = 0$ et $y_{i_0} = 1$.

Il suffira alors d'établir (à l'aide de (ii) et de de la question précédente) que :

$$\forall n > i_0, x_n = 1 \text{ et } y_n = 0. \quad (\star)$$

On aura alors $\Psi(x) = \Psi(y) \in D$.

Ce qui prouvera bien que les éléments de $]0, 1[\setminus D^*$ admettent au plus un antécédent par Ψ c'est à dire (iv).

De plus vue la configuration de x et y , $\Psi(x)$ (qui est élément de D^*) admettra exactement deux antécédents ce qui permettra facilement de conclure quant à (v) car on sait que tout élément de D admet un antécédent par Ψ qui stationne à 0.

Il reste donc à établir (★)!

$$\text{On a } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}} \text{ donc } \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{i_0+1}} + \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$$

$$\text{d'où } 1 = \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{x_n - y_n}{2^{n-i_0}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+i_0} - y_{k+i_0}}{2^k}$$

Je note pour $k \in \mathbb{N}^*$, $z_k = x_{k+i_0} - y_{k+i_0}$ et on a $z_k \in \{0, 1, -1\}$.

Pour obtenir le résultat voulu il suffit d'établir que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x_{k+i_0} - y_{k+i_0} = z_k = 1$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $z_p \neq 1$

$$\text{On a } 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k}{2^k} \text{ et on remarque que : } 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \text{ donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - z_k}{2^k} = 0$$

$$\text{d'où } 0 = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1 - z_k}{2^k} + \frac{1 - z_p}{2^p} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1 - z_k}{2^k}$$

$$\text{Or } \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}, \frac{1 - z_k}{2^k} \geq 0 \text{ et } \frac{1 - z_p}{2^p} > 0$$

d'où $0 > 0$ ce qui est absurde et ce qui permet de conclure.

Λ bien définie : Soit $x = (x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On a $\Psi(x) \in [0, 1]$.

D'après les remarques précédentes, on a :

$$(\Psi(x) \in [0, 1[\setminus D^*) \text{ ou } (\Psi(x) \in D \cup \{1\} \text{ et } x \text{ stationne à } 1) \text{ ou } (\Psi(x) \in D^* \text{ et } x \text{ stationne à } 0)$$

ainsi tous les cas sont envisagés. De plus $[0, 1[$ est stable par $t \mapsto \frac{t}{2}$ et par $t \mapsto \frac{1+t}{2}$,

donc si $\Psi(x) \neq 1$ alors $\Lambda(x) \in [0, 1[$ et si $\Psi(x) = 1$ alors x stationne à 1 et $\Lambda(x) = \frac{1}{2} \in [0, 1[$

Ainsi $\Lambda(x)$ est bien défini dans $[0, 1[$. Ce qui prouve que Λ est bien définie.

Λ surjective : Soit $X \in [0, 1[$. On montre l'existence de $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Lambda(x) = X$.

Si $X \in [0, 1[\setminus D^*$:, alors la question précédente nous fournit $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Psi(x) = X$ et ainsi $X = \Lambda(x) = \Psi(x)$

Si $X \in D^*$ et $0 < X \leq \frac{1}{2}$: alors $2X \in D^* \cup \{1\}$.

donc $2X$ admet un antécédent $(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par Ψ qui stationne à 1

On a alors $\Psi(x) \in D \cup \{1\}$ et donc $\Lambda(x) = X$.

Si $X \in D^*$ et $\frac{1}{2} < X$: alors $2X - 1 \in D^*$

donc $2X - 1$ admet un antécédent $(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par Ψ qui stationne à 0 et ainsi $\Lambda(x) = X$

Λ injective : Soit x et $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telles que $\Lambda(x) = \Lambda(y)$.

Premier cas $\Lambda(x) \in [0, 1[\setminus D^*$: alors $\Psi(x) = \Psi(y) = 0$ ou $\Psi(x) = \Psi(y) \in]0, 1[\setminus D$
et donc $\Psi(x)$ admet un seul antécédent par Ψ d'où $x = y$

Deuxième cas $\Lambda(x) \in D$ et $\Lambda(x) > \frac{1}{2}$:

Alors $\Psi(x) = \Psi(y) \in D^*$ et x, y sont des suites qui ne stationnent pas à 1
donc elles stationnent à 0 puis $x = y$

Troisième cas $\Lambda(x) \in D^*$ et $\Lambda(x) \leq \frac{1}{2}$:

On obtient de même que ces suites stationnent à 1 puis que $x = y$

Conclusion : Λ réalise une bijection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0, 1[$

37. On suppose par l'absurde que $[0, 1[$ est dénombrable.

alors d'après 36, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable

alors d'après 34, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est dénombrable

Ainsi il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Absurde d'après 33

On conclut que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable