

Épreuve de mathématiques II
Correction

A. Une propriété de Perron- Frobenius

1. Rappelons d'abord la formule générale pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$${}^tXAX = (AX|X) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}x_i x_j.$$

Ici, et en utilisant l'indication, on a

$${}^tXH_nX = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j} dt.$$

Utilisant la linéarité de l'intégrale et reconnaissant un carré, on obtient :

$${}^tXH_nX = \int_0^1 \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} x_i x_j t^{i+j} dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i \right)^2 dt.$$

De la formule précédente, on déduit immédiatement que H_n est positive. Démontrons qu'elle est définie positive. En effet, si ${}^tXH_nX = 0$, alors, puisqu'on intègre une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ dont l'intégrale doit être nulle, on déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i = 0.$$

Un polynôme ayant une infinité de racine étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H_n est définie positive.

2. Soit X un vecteur de \mathcal{V} . Donc $H_n X = \rho_n X$ puis

$${}^tXH_nX = \rho_n {}^tXX = \rho_n \|X\|^2.$$

Réciproquement, H_n étant symétrique à coefficients réels. Le cour indique (théorème spectral) qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$H_n = PD^tP.$$

Notons $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ les valeurs propres de H_n de telle sorte que $D = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Soit maintenant X un élément non nul de \mathbb{R}^n vérifiant ${}^tXH_nX = \rho_n \|X\|^2$. Posons

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = {}^tPX = P^{-1}X,$$

on a :

$${}^tX H_n X = (PY|PD^tPPY) = (Y|DY)$$

et

$$\|X\|^2 = (X|X) = (PY|PY) = (Y|{}^tPPY) = \|Y\|^2.$$

Or ${}^tX H_n X = \rho_n \|X\|^2$ donc ${}^tY D_n Y = \rho_n \|Y\|^2$. Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} y_k(\lambda_k y_k) = \rho_n \sum_{k=0}^{n-1} y_k^2$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\rho_n - \lambda_k) y_k^2 = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (\rho_n - \lambda_k) y_k^2 \geq 0.$$

Alors $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (\rho_n - \lambda_k) y_k^2 = 0$, donc $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (\rho_n - \lambda_k) = 0$ ou $y_k = 0$. Par conséquent, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (\rho_n - \lambda_k) y_k = 0$ ce qui donne $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \rho_n y_k = \lambda_k y_k$ et ce qui signifie exactement que $D_n Y = \rho_n Y$.

Alors $D^t P X = \rho_n {}^t P X$ donc $P D^t P X = \rho_n P^t P X$ ou encore $H_n X = \rho_n X$. Donc X est un vecteur propre de H_n associé à la valeur propre ρ_n .

3. On a :

$$\begin{aligned} {}^tX_0 H_n X_0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_i x_j \frac{1}{i+j+1} \leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_i x_j \frac{1}{i+j+1} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |x_i| |x_j| \frac{1}{i+j+1} = {}^t|X_0| H_n |X_0|. \end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée.

D'autre part, $X_0 \in \mathcal{V}$, donc ${}^tX_0 H_n X_0 = \rho_n \|X_0\|^2$. Comme $|X_0| \in \mathbb{R}^n$, alors ${}^t|X_0| H_n |X_0| \leq \rho_n \| |X_0| \|^2 = \rho_n \|X_0\|^2$. Ainsi ${}^t|X_0| H_n |X_0| = \rho_n \| |X_0| \|^2$. Donc $|X_0|$ est un élément non nul de \mathbb{R}^n tel que ${}^t|X_0| H_n |X_0| = \rho_n \| |X_0| \|^2$. Ainsi $|X_0|$ est un élément de \mathcal{V} .

4. Posons $H_n |X_0| = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$. Soit $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, t_j = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|x_i|}{i+j+1}$. Or $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$

$\frac{|x_i|}{i+j+1} > 0$ et il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $|x_k| > 0$, donc $t_j = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|x_i|}{i+j+1} > 0$. Les

composantes de $H_n |X_0|$ sont strictement positives.

On a $H_n |X_0| = \rho_n |X_0|$ donc les composantes de $\rho_n |X_0|$ sont strictement positives. comme $\rho_n > 0$ et les composantes de $|X_0|$ sont strictement positives, alors X_0 n'a aucune composante nulle.

5. On a ${}^tX_0 H_n X_0 = {}^t |X_0| H_n |X_0|$. Donc $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (|x_i| |x_j| - x_i x_j) \frac{1}{i+j+1} = 0$, ainsi $\forall i, j \in$

$\llbracket 0, n-1 \rrbracket, |x_i| |x_j| = x_i x_j$. Alors $\forall i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_i x_j > 0$, en particulier $x_i x_0 > 0$. Donc les composantes de X_0 sont toutes de même signe.

Maintenant, posons $p = \dim \mathcal{V}$ et supposons $p \geq 2$. \mathcal{V} est un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , donc \mathcal{V} possède une base orthonormée (X_1, X_2, \dots, X_p) .

Si $p \geq 2$, alors X_1 et X_2 sont deux vecteurs non nuls et orthogonaux. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$, les a_i (resp. les b_i) sont non nuls et de même signe. Ainsi $a_0b_0, a_1b_1, \dots, a_{n-1}b_{n-1}$ sont non nuls et de même signe. Alors nécessairement $\sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i = (X_1|X_2)$ n'est pas nulle donc X_1 et X_2 ne sont pas orthogonaux ce qui est absurde donc $p \leq 1$. Or \mathcal{V} est un sous-espace propre donc $\dim \mathcal{V} = p = 1$.

B. Inégalité de Hilbert

6. Posons $P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Donc $P(e^{i\theta})e^{i\theta} = \sum_{k=0}^d a_k e^{i(k+1)\theta}$.

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(x)dx &= \sum_{k=0}^d a_k \int_{-1}^1 x^k dx \\ &= \sum_{i=0}^d a_k \left[\frac{1 - (-1)^{k+1}}{k + 1} \right] \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta &= \sum_{k=0}^d a_k \int_0^\pi e^{i(k+1)\theta} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^d a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)} \right]_0^\pi \\ &= \sum_{k=0}^d a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\pi} - 1}{i(k+1)} \right] \\ &= -i \sum_{i=0}^d a_k \left[\frac{1 - (-1)^{k+1}}{k + 1} \right] \\ &= -i \int_{-1}^1 P(x)dx. \end{aligned}$$

D'où :

$$\left| \int_{-1}^1 P(x)dx \right| = \left| i \int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})e^{i\theta}| d\theta = \int_0^\pi |P(e^{i\theta})| d\theta.$$

On a ${}^tX H_n X = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_i x_j}{i + j + 1} = \int_0^1 [\tilde{X}(t)]^2 dt$

Il est clair que $\int_0^1 [\tilde{X}(x)]^2 dx \leq \int_{-1}^1 [\tilde{X}(x)]^2 dx$ puisque $[0, 1] \subset [-1, 1]$ et la fonction sous signe intégral est positive. D'autre part, on a :

$$\int_{-1}^1 [\tilde{X}(x)]^2 dx \leq \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

D'où

$${}^tX H_n X \leq \int_0^\pi |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

7. L'application $\theta \mapsto \tilde{X}(e^{i\theta})\tilde{X}(e^{-i\theta})$ étant paire, donc $\int_0^\pi \tilde{X}(e^{i\theta})\tilde{X}(e^{-i\theta})d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \tilde{X}(e^{i\theta})\tilde{X}(e^{-i\theta})d\theta$.

Ainsi

$${}^tX H_n X \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \tilde{X}(e^{i\theta})\tilde{X}(e^{-i\theta})d\theta.$$

On a $\tilde{X}(x)^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l x^{k+l}$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \tilde{X}(e^{i\theta})\tilde{X}(e^{-i\theta})d\theta &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l \int_{-\pi}^\pi e^{i(k-l)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l \delta_{k,l} 2\pi \\ &= \pi \sum_{k=0}^n x_k^2 = \pi \|X\|^2 \end{aligned}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker. D'où l'inégalité demandée :

$${}^tX H_n X \leq \pi \|X\|^2.$$

8. Soit $X' = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_n = 0$, $X' \in \mathbb{R}^{n+1}$ et vérifie :

$${}^tX' H_{n+1} X' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{x_i x_j}{i+j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_i x_j}{i+j+1} = {}^tX H_n X.$$

Comme ${}^tX H_n X \leq \rho_n \|X\|^2$ et ${}^tX' H_{n+1} X' \leq \rho_{n+1} \|X'\|^2 = \rho_{n+1} \|X\|^2$ et $\|X\| \neq 0$, alors $\rho_n \leq \rho_{n+1}$. Ainsi la suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ est croissante. De plus d'après la question 7., la suite ρ_n est majorée par π , donc on peut conclure que la suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

C. Opérateur intégral

9. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $t \in [0, 1[$, $|K_n(tx)f(t)| \leq n|f(t)|$ et f est intégrable sur $[0, 1[$, donc il est de même de la fonction $t \mapsto K_n(xt)f(t)$, donc l'application $T_n(f)$ est bien défini sur $[0, 1[$.

De plus, pour tout $k \in [0, 1]$, $|t^k f(t)| \leq |f(t)|$, donc on peut écrire :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0, 1[, T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \int_0^1 t^k f(t) dt.$$

Ceci montre que T_n prend ses valeurs dans l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n - 1$, qui est inclus dans E . L'application T_n est évidemment linéaire, ainsi T_n définit un endomorphisme de E .

L'opérateur T_n ne peut pas être injective, sinon E serait isomorphe à un sous-espace de l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n - 1$, ce qui est impossible puisque E est de dimension infinie, ainsi il existe $f \in E$, non nulle, telle que $T_n(f) = 0$, autrement 0 est une valeur propre de T_n .

10. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, on a, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$T_n(\tilde{X})(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (tx)^k \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j dt = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j x^k}{j+k+1},$$

qui s'écrit, matriciellement, sous la forme :

$$T_n(\tilde{X})(x) = (1, x, \dots, x^{n-1}) H_n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de H_n (non nulle), donc il existe $X \in \mathbb{R}^n$, vecteur non nul, tel que $H_n(X) = \lambda X$, ainsi pour tout $x \in [0, 1[$, on a :

$$T_n(\tilde{X})(x) = (1, x, \dots, x^{n-1}) H_n X = \lambda (1, x, \dots, x^{n-1}) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k = \lambda \tilde{X}(x).$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de T_n , car \tilde{X} est une fonction non nulle.

• Soit maintenant λ une valeur propre non nulle de T_n , donc il existe $f \in E$ vecteur non nul tel que $\forall x \in [0, 1[, T_n(f)(x) = \lambda f(x)$ et donc $f(x) = T_n\left(\frac{f}{\lambda}\right)(x)$, comme T_n prend ses valeurs dans l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n - 1$, alors f est une fonction polynomiale de degré inférieurs ou égal à $n - 1$, posons donc

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \text{ et } X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}. X \text{ est un vecteur non nul de } \mathbb{R}^n, \text{ car la fonction } f \text{ est}$$

non nulle et on a :

$$\forall x \in [0, 1[, T_n(f)(x) = T_n(\tilde{X})(x) = (1, x, \dots, x^{n-1})H_n X = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_k x^j}{j+k+1}.$$

Donc la condition $T_n(f) = \lambda f$ est équivalent à :

$$\forall x \in [0, 1[, \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_k x^j}{j+k+1} = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

ou encore

$$\forall x \in [0, 1[, \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} - \lambda a_j \right) x^j = 0.$$

Le polynôme $\sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} - \lambda a_j \right) Y^j$ de l'indéterminée Y admet donc une infinité

de racines, donc il est nul, c'est-à-dire $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} = \lambda a_j = 0$ ou encore

$$H_n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi λ est une valeur propre de H_n .

En conclusion T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

- 11.** Soit g un vecteur propre de T_n non nul associé à ρ_n . D'après ce qui précède g est une fonction polynomiale, donc elle est continue sur $[0, 1]$. En écrivant l'équation de la valeur propre pour g et en divisant par $\varphi \in \mathcal{A}$, on obtient :

$$\forall x \in [0, 1[, \rho_n \left(\frac{g}{\varphi} \right) (x) = \int_0^1 \frac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)} \left(\frac{g}{\varphi} \right) (t) dt.$$

Cela montre que $\frac{g}{\varphi} \in \mathcal{C}[0, 1]$ est une fonction propre de l'opérateur linéaire S_n défini sur $\mathcal{C}[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1[, S_n(f)(x) = \int_0^1 K_{n,\varphi}(x, t) f(t) dt,$$

où $K_{n,\varphi}(x, t) = \frac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)}$. La question 4. montre que les coefficients de g sont de même signe, donc g ne s'annule pas sur $[0, 1[$, et en multipliant par -1 , on peut supposer g à valeurs strictement positives sur $[0, 1[$ et même sur $[0, 1]$. En particulier $g \in \mathcal{A}$. De plus, $K_{n,\varphi}(x, t) \geq 0$.

D'autre part, soit λ une valeur propre de S_n (le spectre $\text{Sp}(S_n)$ des valeurs propres de S_n est non vide, car il contient ρ_n), donc il existe $f \in \mathcal{C}[0, 1]$, non nul tel que

$$\forall x \in [0, 1[, \lambda f(x) = \int_0^1 K_{n,\varphi}(x, t) f(t) dt.$$

Donc $|\lambda||f(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)dt$, avec $\|f\|_\infty = \sup_{x \in]0,1[} |f(x)|$. Ainsi

$$|\lambda| \leq \sup_{x \in]0,1[} \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)dt = \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt.$$

Par conséquent,

$$\sup_{\lambda \in \text{Sp}(S_n)} |\lambda| \leq \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt,$$

et donc

$$\rho_n \leq \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt \quad (1)$$

L'inégalité (1) est valable pour tout $\varphi \in \mathcal{A}$, d'où

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)dt \quad (2)$$

Comme $\forall x \in [0, 1[$, $\rho_n = \frac{1}{g(x)} \int_0^1 K_n(tx)g(t)dt$ et $g \in \mathcal{A}$, alors l'inégalité (2) est une égalité.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

12. Posons, pour $x \in]0, 1[$ et $t \in [0, 1[$, $h(x, t) = \frac{t^n \varphi(t)}{1 - tx}$. La fonction h admet une dérivée partielle par rapport à x qui vaut :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{t^{n+1} \varphi(t)}{(1 - tx)^2}.$$

De plus, pour $x \in]0, a[$ avec $0 < a < 1$, on a : $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^{n+1} |\varphi(t)|}{(1 - ta)^2}$, cette dernière fonction, indépendante de x , est intégrable sur $[0, 1[$ puisque $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{(1 - ta)^2}$ est majorée sur $[0, 1[$, donc par théorème de dérivation des fonctions définies par des intégrales, la fonction J_n est dérivable sur $]0, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad J_n(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \varphi(t)}{(1 - tx)^2} dt.$$

D'autre part, si $x \in]0, 1[$, on obtient :

$$xJ_n(x) = \int_0^1 \frac{xt^{n+1} \varphi(t)}{(1 - tx)^2} dt = \int_0^1 \frac{(1 + tx - 1)t^n \varphi(t)}{(1 - tx)^2} dt = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1 - tx} dt - J_n(x).$$

13. • Cas : $n = 0$: On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt &= \left[\frac{(1-t)\varphi(t)}{1-tx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(1-t)}{1-tx} \right) \varphi(t) dt \\ &= -\varphi(0) - \int_0^1 \frac{(x-1)}{(1-tx)^2} \varphi(t) dt \\ &= -\varphi(0) - (x-1) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt \end{aligned}$$

Donc $0 = \varphi(0) + (x-1) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{(1-tx)^2} dt$, dans ce cas $c = \varphi(0)$.

• Cas $n \geq 1$: On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt &= \left[\frac{t^n(1-t)\varphi(t)}{1-tx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t^n(1-t)}{1-tx} \right) \varphi(t) dt \\ &= - \int_0^1 \frac{(nt^{n-1} - (n+1)t^n)(1-tx) + xt^n(1-t)}{(1-tx)^2} \varphi(t) dt \\ &= -n \int_0^1 \frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx} dt + (n+1) \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx} dt - x \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt \\ &\quad + \int_0^1 \frac{(xt)t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt \\ &= -nJ_{n-1}(x) + (n+1)J_n(x) - (x-1) \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt - J_n(x) \end{aligned}$$

D'où :

$$nJ_n(x) = nJ_{n-1}(x) + (x-1) \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt$$

Donc, si $n \geq 1$, $c = 0$.

14. On a :

$$\begin{aligned} x(1-x)J'_n(x) &= (1-x) \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt - (1-x)J_n(x) \\ &= (x-1)J_n(x) + c_n + nJ_{n-1}(x) + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt - nJ_n(x) \\ &= c + (x-n-1)J_n(x) + n \int_0^1 \frac{t^{n-1}\varphi'(t)}{1-tx} dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt \\ &= c + (x-n-1)J_n(x) + n \int_0^1 \frac{t^{n-1}(1-tx+tx)\varphi(t)}{1-tx} dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt \\ &= c + (x-n-1+nx)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1}\varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt \\ &= c + (x-1)(n+1)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1}\varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt. \end{aligned}$$

15. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, la solution générale est de la forme $y(t) = K(1-t)^\gamma$. On a les propriétés suivantes :

- y est continue sur $[0, 1[$ quel que soit la valeur de γ ,
 - y est strictement positive sur $[0, 1[$ si, et seulement si, $K > 0$,
 - $\frac{1}{y}$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$ si, et seulement si, $\gamma < 0$,
 - y est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$ quel que soit la valeur de γ ,
 - $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)y(t) = K \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^{\gamma+1} = 0$ si, et seulement si, $\gamma + 1 > 0$.
- Donc y vérifie les conditions faites sur φ si, et seulement si, $K > 0$ et $\gamma \in]-1, 0[$.

16. Soit $x \in]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{d}{dx} \left((1-x)^{-\gamma} x^n J_n(x) + (1-x)^{-\gamma} x^n J_n(x)'(x) \right) \\ &= \left(\frac{\gamma}{1-x} + \frac{n}{x} \right) (1-x)^{-\gamma} x^n J_n(x) \\ &\quad + (1-x)^{-\gamma-1} x^{n-1} \left(c + (x-1)(n+1)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{t^n (1-t) \varphi'(t)}{1-tx} dt \right) \\ &= \left(\frac{\gamma}{1-x} + \frac{n}{x} \right) \Phi_n(x) + \frac{cx^{n-1}}{(1-x)^\gamma} - \frac{n+1}{x} \Phi_n(x) \\ &\quad + \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} \left(n \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^\gamma dt - \gamma J_n(x) \right) \\ &= -(\gamma+1) \frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}} \end{aligned}$$

où $c_n = c + n \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^\gamma dt = c + n \frac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)} = c + \frac{n!}{(n+\gamma)(n+\gamma-1)\dots(\gamma+1)}$.

17. La solution de l'équation homogène est de la forme $y(x) = \frac{K}{x^{\gamma+1}}$. La méthode de la variation de la constante, donc une solution de la forme :

$$t \mapsto \lambda + c_n \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} dt$$

et comme $\Phi_n(0) = 0$, alors

$$\forall x \in]0, 1[, \Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} dt.$$

18. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (tx)^k \varphi(t) dt \\ &= \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 \frac{1-(tx)^n}{1-tx} \varphi(t) dt, \quad tx \neq 1 \\ &= \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1-tx} dt - \frac{x^n}{\varphi(x)} \int_0^1 \frac{t^n \varphi(x)}{1-tx} dt \\ &= \frac{x^0 J_0(x)}{\varphi(x)} - \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)} \\ &= \Phi_0(x) - \Phi_n(x). \end{aligned}$$

Donc $r_n(x) = \frac{c_0}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}} dt - \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}} dt$. $c_0 = \varphi(0) = 1$ et si $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{n!}{(n+\gamma)(n+\gamma-1)\dots(\gamma+1)} = \theta_n.$$

Ainsi,

$$r_n(x) = \frac{1}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}} dt - \frac{\theta_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}} dt = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1 - \theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt.$$

Quand α décrit l'intervalle $]0, 1[$, la fonction φ décrit \mathcal{A} , donc on peut conclure que :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0, 1[} \sup_{x \in]0, 1[} r_n(x) = \inf_{\alpha \in]0, 1[} \sup_{x \in]0, 1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1 - \theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt.$$

19. De la question précédente on peut déduire, en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$, que

$$\rho_n \leq \theta_n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{n}} \int_0^{\theta_n^{\frac{-1}{n}}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

La fonction $t \mapsto -2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-t}{t}} \right) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{t}{1-t}} \right) - \pi = 2 \arcsin \sqrt{t} - \pi$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$, donc :

$$\theta_n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{n}} \int_0^{\theta_n^{\frac{-1}{n}}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \theta_n^{\frac{1}{2n}} \left(2 \arcsin \theta_n^{\frac{-1}{n}} \right) = 2w_n \arcsin \left(\frac{1}{w_n} \right).$$

Ainsi,

$$\rho_n \leq 2w_n \arcsin \left(\frac{1}{w_n} \right).$$

20. Utilisons la formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}$, pour trouver un équivalent de w_n :

$$w_n = 2 \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{2n}} \underset{+\infty}{\sim} 2 \frac{\left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \right)^{\frac{1}{2n}}} = 2 \frac{\frac{n}{e} \sqrt[2n]{2\pi n^{\frac{1}{n}}}}{\frac{2n}{e} \sqrt[4n]{4\pi n^{\frac{1}{2n}}}} \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4n}}.$$

D'où, $n(w_n - 1) \underset{+\infty}{\sim} n \left(n^{\frac{1}{4n}} - 1 \right) = n \left(e^{\frac{\ln(n)}{4n}} - 1 \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4}$ et donc :

$$w_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4n},$$

ce qui implique immédiatement

$$\pi - 2w_n \arcsin \left(\frac{1}{w_n} \right) \underset{+\infty}{\sim} \pi - 2n^{\frac{1}{4n}} \frac{\pi}{2} = \pi \left(1 - e^{\frac{\ln(n)}{4n}} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi \ln(n)}{4n}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) = 0$ et $\pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) \leq 0$ pour n assez grand.
 D'après la partie **B**, la question 7., $\forall n \geq 0$, $\rho_n \leq \pi$, par conséquent, et pour n assez grand,

$$0 \leq \pi - \rho_n \leq 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) - \pi.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \pi.$$

