Épreuve de mathématiques I
Correction

Exercice I

1. • la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = \dfrac{t}{e^t - 1}$ étant continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0, car $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$, de plus $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} te^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

• Puisque $0 < e^{-t} < 1$ pour tout $t > 0$, on a :

$$\forall t > 0,\quad f(t) = te^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} te^{-(n+1)t} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t),$$

avec $t \longmapsto u_n(t) = te^{-(n+1)t}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ car en $+\infty$, $u_n(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

D'autre part, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$ et donc la série des intégrales $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{\infty} |u_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

RÉSUMÉ : la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge simplement vers $f : t \longmapsto \dfrac{t}{e^t-1}$, qui est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et chaque u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc on déduit que f est intégrable sur $]0,+\infty[$ (déjà démontré) et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice II

2. La série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n t^n$ converge en $t = 1$, car $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. Donc le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} p_n t^n$ est au moins égal à 1, et par conséquent G_X est bien définie sur $]-1,1[$.

Première méthode : On a, par définition, $G_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2})$ et les variables aléatoires t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes, donc

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t).$$

Deuxième méthode : Pour tout $t \in]-1,1[$ et aussi par définition on a :

$$\begin{aligned}
G_{X_1+X_2}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1+X_2=n)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1=k\cap X_2=n-k)\right)t^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k)\right)t^n (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes})\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(X_1=n)t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(X_2=n)t^n\right) (\text{produit de deux séries entières})\\
&= G_{X_1}(t).G_{X_2}(t).
\end{aligned}$$

3. Notons X_i le résultat du i-ème tirage. La loi de la variable aléatoire X_i est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2
$p(X_i=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

D'où la fonction génératrice de X_i :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ G_{X_i}(t)=\sum_{k=0}^{2} kp(X_i=k)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{4}(1+t)^2$$

On remarque que $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$. Puisque le tirage se fait avec remise alors les variables alaéatores sont indépendantes et donc :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \ G_{S_n}(t)=(G_{X_i}(t))^n=\frac{1}{4^n}(1+t)^{2n}=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\complement_{2n}^{k}t^{2k}.$$

Donc S_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1,2,...,2n\}$ avec, $\forall k\in\{0,1,2,...,2n\}$,

$$p(S_n=k)=\frac{\complement_{2n}^{k}}{4^n}=\complement_{2n}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

Donc S_n suit une loi binomiale de paramètres $2n$ et $\frac{1}{2}$: $S_n\hookrightarrow\mathscr{B}\left(2n,\frac{1}{2}\right)$.

Problème

Partie I : Propriétés

4. • Pour tout $x\in]-1,1[$ fixé, $\lim_{n\to\infty} x^n=0$, donc $1-x^n$ est équivalent à 1 au voisinage de l'infini.

• Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $|a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}| \underset{n\to\infty}{\sim} |a_n x^n|$ et la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n x^n|$ converge, donc par comparaison, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument pour tout $x \in]-1,1[$.

• Considérons la suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k; \\ \dfrac{(-1)^k}{k+1} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

La série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^k}{k+1} x^{2k+1}$ est de rayon de convergence 1. De plus

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{x^{2k+1}}{1-x^{2k+1}}.$$

La série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^k}{k+1} \dfrac{(-1)^{2k+1}}{1-(-1)^{2k+1}} = \dfrac{-1}{2} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, autrement dit, la série L_a converge en -1.

5. Posons $u_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x^n}$ pour tout $x \in]-1,1[$. u_n est bien définie sur $[-b,b]$, dérivable et

$$\forall x \in]-1,1[,\ u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$$

On vérifie aisément, et suivant la parité de n, que :

$$\sup_{x\in[-b,b]} |a_n u_n(x)| = |a_n u_n(\alpha)|,$$

où $\alpha \in \{-b,b\}$, ce qui garantit la convergence normale et donc uniforme sur $[-b,b]$.

6. • Puisque chaque fonction $f_n : x \mapsto a_n u_n(x)$ est continue sur $]-1,1[$ et la convergence est uniforme sur chaque $[-b,b]$ inclus dans $]-1,1[$, la fonction f est continue sur $]-b,b[$ et ceci pour tout $0 < b < 1$. Donc f est continue sur $]-1,1[$.

• Chaque fonction f_n est dérivable sur $]-1,1[$. De même qu'à la question précédente, la série dérivée est uniformément convergente sur tout segment $[-b,b]$ inclus dans $]-1,1[$. On en déduit que la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-1,1[,\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

En particulier, $f'(0) = a_1$.

7. Les I_n forment une partition de A, donc puisque la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est sommable, on peut calculer sa somme en regroupant les termes d'indices $(k,p) \in I_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}.$$

Si $x \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |a_n x|^{np},$$

et lorsque n tend vers l'infini

$$|a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \sim |a_n x|^n.$$

Il en résulte que la série de terme général $|a_n| \dfrac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge, et que la série double de terme général $a_n x^{np}$ converge absolument. Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{p=1}^{\infty} x^{np} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_n x^{np},$$

et l'on peut calculer cette somme en regroupant les termes de même puissance s

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_n x^{np} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{\{(n,p)/np=s\}} a_{\frac{s}{p}} \right) x^s.$$

Mais $\displaystyle\sum_{\{(n,p)/np=s\}} a^{\frac{s}{p}} = \sum_{d|n} a_d = b_s$. On a finalement

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{s=1}^{\infty} b_s x^s.$$

Partie II : Exemples

8. D'après les questions précédentes, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} x^{np} = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{\{(n,p)/np=s\}} 1 \right) x^s.$$

Mais $\displaystyle\sum_{\{(n,p)/np=s\}} 1$ est le nombre de façons de pouvoir écrire s comme produit de deux facteurs, c'est-à-dire le nombre de diviseurs de s. On a donc

$$\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{s=1}^{\infty} d_s x^s$$

9. • On a $1 \leq \varphi(n) \leq n$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x|^n \leq |\varphi(n) x^n| \leq n|x|^n$$

Il en résulte que le rayon de convergence est compris entre les rayons de convergence des séries entières $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n x^n$. Or ces derniers sont, l'un et l'autre, égaux à 1. D'où $R = 1$.

• Les diviseurs de 12 sont : $1, 2, 3, 4, 6, 12$ et

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(6)+\varphi(12)=1+1+2+2+2+4=12$$

L'égalité est bien vérifiée.
• Pour tout $x\in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$$

avec $b_n=\sum_{d|n}\varphi(d)=n$. D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\frac{x^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

10. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ à pour somme $\ln(1+x)$ sur $]-1,1[$, d'autre part, on a, d'après l'étude faite sur le séries alternées :

$$\forall x\in[0,1],\quad\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right|\leq\frac{x^{n+1}}{n+1}\leq\frac{1}{n+1}$$

inégalité qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x\longmapsto\ln(1+x)$, et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\lim_{x\longmapsto1,x<1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim_{x\longmapsto1,x<1}\ln(1+x)=\ln(2).$$

11. • $\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $\frac{f(x)}{x}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{1-x^n}$. Étudions donc la série $\sum_{n_i\mathbb{N}^*}(-1)^nf_n(x)$ où $f_n(x)=\frac{x^{n-1}}{1-x^n}$. Notons g sa somme. La fonction f_n est dérivable sur chaque $[-b,b]$ inclus dans $]-1,1[$ ($0<b<1$) et

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f_n'(x)=\frac{(n-1+x^n)x^{n-2}}{(1-x^n)^2}.$$

Donc, suivant la parité de n,

$$\sup_{x\in[-b,b]}|(-1)^nf_n(x)|=|f_n(\alpha)|$$

où $\alpha\in\{-b,b\}$.
Puisque la série numérique de terme général $|f_n(\alpha)|$, $n\geq1$, converge, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^nf_n(x)$ est normalement et donc uniformément convergente sur $[-b,b]$.

Comme chaque fonction f_n est continue, la fonction g est continue sur $[-b, b]$, en particulier en 0. D'où :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0}(-1)^n f_n(x) = a_1 = -1.$$

Ainsi $f(x)$ est équivalent à $-x$ au voisinage de 0.

• D'après le résultat de la question 6., la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = f'(0) = -1$ ($f(0) = 0$), ce qui justifier aussi le résultat de cette question.

12. Pour tout x de $]0,1[$, $(1-x)f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{1+x+...+x^{n-1}}$. Il s'agit donc d'une série alternée, puisque $x > 0$.

Posons $v_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x+...+x^{n-1}}$ pour tout $x \in [0,1]$. Si $x \in]0,1[$, $v_n(x) = \dfrac{(1-x)x^n}{1-x^n}$. On voit bien que $(v_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante et de limite nulle, donc d'après le critère special de séries alternées, on peut écrire :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k v_k(x)\right| \leq v_{n+1}(x) \quad (*)$$

Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\sqrt[n]{1.x....x^{n-1}} \leq \frac{1+x+...+x^{n-1}}{n},$$

d'où :

$$\frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1+x+...+x^{n-1}} \leq \frac{1}{n},$$

et donc $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{x^{\frac{n+1}{2}}}{n} \leq \dfrac{1}{n}$.

Ceci prouve, en tenant compte de l'inégalité $(*)$, la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n v_n(x)$ sur $[0,1]$, d'où par interversion de limites :

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = \lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1}(-1)^n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Donc $f(x)$ est équivalent à $-\dfrac{\ln(2)}{1-x}$.

•••••••• •