DEVOIR LIBRE N°11 - SUJET CCINP

2020

$(T_{n,N})_{n\geqslant 1, N\geqslant 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall N \geqslant 2,\ T_{n,N}(\Omega) = \{0;1;2\}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(T_{n,N}=0) = \mathbb{P}(T_{n,N}=1) = \frac{1}{N} \text{ et } \mathbb{P}(T_{n,N}=2) = 1 - \frac{2}{N}.$$

Soit $N \geqslant 2$ fixé. On pose :

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}.$$

On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que X_N admet une espérance et une variance et donner leur valeur en fonction de N.
2. Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer que :

$$\mathbb{P}(|X_N - 1)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - 1)| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

2019

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n)$, la fonction génératrice de X est $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Démontrer que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.
2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in]-1,1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre en utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E(t^X)$.

   On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer pour tout $t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

2016

1. Démontrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) vérifie :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}[(X=i)\cap(Y=j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

   (a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.
   (b) Démontrer que les variables X et Y suivent une même loi que l'on déterminera.
   (c) Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

2015

Exercice I.

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer sa fonction génératrice, puis en déduire son espérance et sa variance.

Partie 4 du problème : Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$.

On pose : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

1. S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P(|Sn - nx| > n\alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$.
   (b) Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$$

2. (a) Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a,b) \in [0,1]^2$, $|a-b| \leqslant \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha$.
   (b) Justifier que $\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathbb{P}(S_n = k)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.
   (c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, puis conclure.