# PROBLÈME

## I GÉNÉRALITÉS

**1**.a. Il suffit de considérer $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$

**1**.b. Il suffit de considérer $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$

**1**.c. Il suffit de considérer $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

**1**.d. On sait que si une suite d'applications bornées sur un domaine $A$ converge uniformément sur ce domaine vers une application $f$, alors $f$ est bornée sur $A$. Dès lors, n'importe lequel des trois exemples précédents convient : les sommes partielles sont bornées sur $[-1,1]$ (par Heine, puisque ce sont des fonctions polynomiales donc continues) et la somme n'est pas bornée sur $]-1,1[$.

**2**. C'est du cours ! (on dispose ici de la convergence normale de la série sur [0,1] ...)

**3**. Pour $x \in ]-1,1[$, on peut écrire : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n} = x\ln(1+x) + [\ln(1+x) - x]$.

Comme la question précédente s'applique, on en déduit : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$ .

## II THÉORÈME D'ABEL

**4**.a. Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$ , on a tout simplement : $\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = R_n(x)$ .

**4**.b. Il est bien connu *(mais ça n'est pas au programme)* que dans ces histoires, il faut travailler sur les sommes partielles : $\sum_{p=1}^{k} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = \sum_{p=1}^{k} r_{n+p-1}\, x^{n+p} - \sum_{p=1}^{k} r_{n+p}\, x^{n+p}$ ; après mise à l'écart du premier terme de la première somme et réindexation des autres, on obtient : $\sum_{p=1}^{k} (r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = r_n\, x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p}\, x^{p-1} - r_{n+k}\, x^{n+k}$ ; le dernier terme tend vers 0 lorsque $k$ tend vers l'infini car $r_{n+k}$ tend vers 0 puisque la série $\sum a_n$ converge, et $x^{n+k}$ est borné ; il suffit donc de faire tendre $k$ vers l'infini pour obtenir la relation voulue [1].

**4**.c. Comme on l'a déjà signalé, $r_n$ tend vers 0 ; par conséquent, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on dispose d'un entier $n_0$ pour tout $k \geqslant n_0$ on ait $|r_k| \leqslant \varepsilon/2$ ; alors on a bien $|r_{n+p}| \leqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant n_0$ et $p$ entier naturel. Et pour $x \in [0,1]$ et $n \geqslant n_0$ on obtient : $|R_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \varepsilon$ .

**4**.d. Continuité de la somme à gauche en 1, assurée par convergence uniforme de la série sur $[0,1]$.

**5**. Par contraposition, la série est divergente.

**6**. Par primitivation du développement de $\frac{1}{1+x^2}$ on obtient $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in ]-1,1[$ ; et l'on peut [2] appliquer le théorème d'Abel pour obtenir : $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

**7**.a La série proposée converge par critère spécial des séries alternées. Le terme général du produit de

1. Qui est valable aussi en 1 ...
2. Ce résultat s'obtient aussi par majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial ...

Cauchy est ici : $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}} = (-1)^n a_n$ . (poser $u_0 = v_0 = 0$ )

Or $k(n-k) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ $\big($étude des variations, ou mieux : $(n-2k)^2 \geqslant 0\big)$ et par conséquent $a_n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$ ; ce qui montre que la série de terme général $w_n$ diverge grossièrement.

**7**.b Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n\, x^n$ et $\sum v_n\, x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, c'est alors aussi le cas de $\sum w_n\, x^n$... Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a : $U(x)\,V(x) = W(x)$ pour tout $x \in [0,1[$ . Mais d'après le théorème d'Abel [3] appliqué à chacune des trois séries, lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs inférieures, $U(x)$ tend vers $\sum u_n$ , $V(x)$ tend vers $\sum v_n$ , $W(x)$ tend vers $\sum w_n$ . Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième.

## III RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

**8**. C'est la question 1.b) !

**9**. Puisque les coefficients sont positifs, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$ ;
en outre, la fonction $f$ est croissante sur $[0,1[$, d'où $f(x) \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.
On a donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. En faisant tendre $x$ vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.

## IV SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

**10**. D'après le lemme d'Abel du programme officiel, s'il existe $r > 0$ tel que la suite de terme général $|a_n|\, r^n$ soit bornée, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\, x^n$ est supérieur ou égal à $r$ .
Avec $r = 1$ on voit ainsi que les deux séries considérées ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Au point 1, la première diverge grossièrement et la deuxième ne converge pas absolument ; par conséquent 1 est le rayon de convergence de l'une et de l'autre.

**11**. Effectivement [4], on peut écrire $f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in ]-1,1[$ ... et appliquer le théorème de Littlewood précédemment admis pour la réciproque du théorème d'Abel.

**12**. On a : $x^p\, g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n\, x^{n+p-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_{k-p}\, x^{k-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_k\, x^{k-1}$.

Par conséquent, $g(x) = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\, x + \cdots \varepsilon_p\, x^{p-1}}{1 - x^p}$.

**13**. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$ diverge quand $x$ tend vers 1 ; tandis que $\displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ tend vers $\ln 2$ ...

**14**. On est bien mis sur la voie par la question précédente : 1 étant racine simple du dénominateur de $g(x)$, il faut et il suffit que 1 soit racine du numérateur pour que l'intégrale soit convergente. (dans ce cas, $g$ est prolongeable par continuité en 1) Une CNS est donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i = 0$ .

Cela ne peut pas se produire lorsque $p$ est impair !

**15**. On a ici : $g(x) = \dfrac{1 + x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5}{1 - x^6} = \dfrac{(1 + x + x^2)(1 - x^3)}{(1 - x^3)(1 + x^3)} = \dfrac{1+x}{1+x^3} + \dfrac{x^2}{1+x^3}$ ;

on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} + \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1 + x^3}$ . La première intégrale (abélienne) vaut :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 3/4} = 2\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 3/4} = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Pour la seconde, on a une primitive évidente ... Le résultat final est donc : $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{3}{\ln 2}$ .

3. Bien entendu, cela devient trivial si les deux rayons initiaux sont strictement supérieurs à 1 ...
4. Cela aurait du être une question préalable, même si c'est du cours ...