Programme de colle – MP 1

Équations différentielles

Extrait du programme officiel :

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)(x) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
b) Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.	Démonstration non exigible. ⇆ I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée.
Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, $\quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$.	Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.
c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Continuité de l'exponentielle.	Notations $\exp(a), e^a, \exp(A), e^A$. ⇆ I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent. Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.	Démonstration non exigible. Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.
d) Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.
e) Méthode de variation des constantes	
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
f) Équations différentielles scalaires du second ordre	
Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.	
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.	Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

Questions de cours :

(i) Développements en série entière des fonctions usuelles (énoncé seulement, avec intervalles de convergence).
Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ d'une série de fonctions (énoncé seulement).

(ii) Système fondamental de solutions d'une équation différentielle scalaire homogène d'ordre 2 à cœfficients constants (énoncé seulement).
Forme d'une solution particulière lorsque le second membre s'écrit $P(t)e^{\lambda t}$ où P est polynomial (énoncé seulement).

(iii) Expliquer la transformation d'une équation différentielle scalaire d'ordre n en un système différentiel d'ordre 1 de dimension n.
Lorsque $n = 2$, (f, g) est un système fondamental de solutions si et seulement si le wronskien ne s'annule pas si et seulement s'il n'est jamais nul.

(iv) Continuité de exp sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$.

Exercices CCINP

1. **CCINP 30** :
   (a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
   (b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (c) i. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   ii. Résoudre (E).

2. **CCINP 31** :
   (a) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

3. **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
   (a) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
   (b) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

4. **CCINP 42** : On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H) \qquad\qquad 2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

   (a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

5. **CCINP 74** :
   (a) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   i. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   ii. Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
   (b) On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

6. **CCINP 75** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

   (b) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.

   (c) En déduire la résolution du système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$.

7. (Fin de semaine) **CCINP 33** : On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f\left(x,y\right) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.

   (a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

   (c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

8. (Fin de semaine) **CCINP 52** :Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

   (b) i. Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   ii. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

   (c) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   i. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,0)\right\}$ et les calculer.
   ii. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   iii. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

9. (fin de semaine) **CCINP 57**

   (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   i. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   ii. Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».

   (b) On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par
   $$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$$
   i. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   ii. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.