Programme de colle – MP 1

Révisions des EDL de MPSI

Voir programme page suivante.

Variables aléatoires

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
d) Variables aléatoires discrètes	
Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.	Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathscr{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.
e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	
Loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.	Extension au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.	
Couple de variables aléatoires indépendantes.	Extension des résultats vus en première année.
Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.	
Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.	Démonstration non exigible.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.
f) Lois usuelles	
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$	Notation $\mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notation $\mathscr{P}(\lambda)$.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$	⇆ I : simulation de cette approximation. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.
g) Espérance	
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(P(X = x)\ x)_{x \in X(\Omega)}$.	Notation $\mathrm{E}(X)$. ⇆ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x\, P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.	
Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω.	Si $\lvert X \rvert \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Contenus	Capacités & Commentaires
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(P(X=x)\ f(x)\big)$ est sommable ; si tel est le cas : $$\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, P(X=x).$$	Démonstration non exigible.
Inégalité de Markov. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	

h) Variance, écart type et covariance

Contenus	Capacités & Commentaires
Moments. Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie. Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$. Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.	
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. ⇆ PC : écart quadratique énergétique.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

i) Loi faible des grands nombres

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, on a, $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$	Les étudiants doivent savoir retrouver, pour $\varepsilon > 0$, l'inégalité : $$P\left(\left\lvert \frac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$ où σ est la variance commune des X_k. ⇆ I : simulation d'une suite de tirages.

j) Fonctions génératrices

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, t^k.$$	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X. Utilisation de G_X pour calculer les moments de X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = G_X{}'(1)$. La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G_X{}'(1)$ et $G_X{}''(1)$. Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	

Semaine prochaine : EDL

Questions de cours :

(i) Les variables aléatoires suivant une loi géométrique sont exactement les variables aléatoires entières sans mémoire.

(ii) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

(iii) Pour chaque loi au programme (Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson)
- Description
- Calcul de l'espérance
- Calcul de la variance
- Calcul de la fonction génératrice : on retrouve alors l'espérance et la variance.

(iv) Inégalités de Cauchy-Schwarz (appliquée à une forme bilinéaire symétrique positive, mais avoir l'idée de la démonstration), de Markov, de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

(v) Formules de Koenig-Huygens pour la variance, puis la covariance. Variance d'une somme, cas où les variables aléatoires sont indépendantes deux à deux.

(vi) **CCINP 32, 42, 95, 96, 97, 99, 100, 106, 108, 110, 111**. (Énoncés page suivante)

Extrait du programme de MPSI

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre : $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Résolution d'une équation homogène.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	$\leftrightarrows$ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	$\leftrightarrows$ PC et SI : modélisation de circuits électriques RC, RL ou de systèmes mécaniques linéaires.
Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Équation homogène associée.
Résolution de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$. $\leftrightarrows$ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme. $\leftrightarrows$ PC et SI : modélisation des circuits électriques LC, RLC et de systèmes mécaniques linéaires.

Exercices CCINP

1. **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
   (a) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
   (b) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

2. **CCINP 42** : On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy'-3y=0 \quad (H) \qquad\qquad 2xy'-3y=\sqrt{x} \quad (E)$$

   (a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   (c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

3. **CCINP 95** : Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
   (a) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
      i. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
      ii. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
   (b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
      i. Déterminer la loi de X.
      ii. Déterminer la loi de Y.

4. **CCINP 96** : On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q\in\mathbb{N},\ \sum\limits_{k\geqslant q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ converge et $\forall\, x\in\,]-1,1[,\ \sum\limits_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q}=\dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
   Soit $p\in\,]0,1[$ et $r\in\mathbb{N}^*$.

   On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$ (le temps est exprimé en secondes).
   On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
   Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t=1$.
   La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
   Les tirs de laser sont indépendants.
   La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
   Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Prouver que X admet une espérance et la calculer.

5. **CCINP 97** : Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\big((X,Y)=(j,k)\big)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

   (a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

6. **CCINP 99** :
   (a) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (b) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que : $\forall\, a \in]0,+\infty[,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
   (c) **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

7. **CCINP 100** : Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
   Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
   On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.
   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
   (b) Calculer λ.
   (c) Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
   (d) X admet-elle une variance ? Justifier.

8. **CCINP 106** : X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par $\forall\, k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
   On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.
   (a) Déterminer la loi du couple (U,V).
   (b) Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(V = n) = pq^{2n}(1+q)$.
   (c) Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
   (d) U et V sont-elles indépendantes ?

9. **CCINP 108** : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par
   $$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}\,j!}$$
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) i. Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   ii. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
   (c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (d) Calculer $P(X = Y)$.

10. **CCINP 110** : Soit $(\Omega,\mathscr{A},P)$ un espace probabilisé.
   (a) Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.
   i. Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1] \subset D_{G_X}$.
   Pour tout réel t fixé de $[-1,1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
   ii. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
   (b) i. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   ii. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

11. **CCINP 111** : On admet, dans cet exercice, que $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in \left]-1, 1\right[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in \left]0, 1\right[$. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par

$$\forall\, (k, n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \displaystyle\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

(b) i. Déterminer la loi de Y.

ii. Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.

iii. Déterminer l'espérance de Y.

(c) Déterminer la loi de X.