Programme de colle – MP 1

Séries entières

Reprise pour exercices.

Variables aléatoires (début)

Révision du programme de MPSI (voir page suivante).

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Variables aléatoires discrètes	
Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.	Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathscr{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.
e) Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	
Loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.	Extension au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.	
Couple de variables aléatoires indépendantes.	Extension des résultats vus en première année.
Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.	
Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.	Démonstration non exigible.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.
f) Lois usuelles	
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$	Notation $\mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notation $\mathscr{P}(\lambda)$.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$	⇆ I : simulation de cette approximation. Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

Pas d'espérance, de variance ni de covariance cette semaine.

Semaine prochaine : Variables aléatoires (suite et fin), EDL.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Produit de Cauchy de deux séries entières.
Exemple le produit a un rayon de convergence strictement plus grand que le minimum des rayons de convergence des deux séries entières, pourtant différents.
Liste des développements en série entière des fonctions usuelles au programme (avec intervalles de convergence).

(ii) Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ à l'aide d'une équation différentielle.

(iii) Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont. D'où le lemme des coalitions.
Description des lois usuelles (uniforme, Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson).

(iv) **CCINP 2** : On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

(a) Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

(b) En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$).
Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

(c) i. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$. On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

ii. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

(v) **CCINP 21** :

(a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.

(c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

(vi) **CCINP 22** :

(a) Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

(b) Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?

(vii) **CCINP 24** :

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

(b) Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

(c) i. Déterminer $S(x)$.

ii. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$, $f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x}$ si $x>0$, $f(x) = \cos\sqrt{-x}$ si $x<0$.
Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(viii) **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

(a) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.

(b) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

(ix) **CCINP 51** :

(a) Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge. On se propose de calculer la somme de cette série.

(b) Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

(c) En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\, x$ ainsi que son rayon de convergence.

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

(x) **CCINP 109** :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Déterminer la loi de Y.

(xi) **CCINP 104** :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

(a) Préciser les valeurs prises par X.

(b) i. Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.

ii. Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

(c) i. Calculer $E(X)$.

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

(xii) **CCINP 98** :

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

(a) Donner la loi de X. Justifier.

(b) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

i. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.

ii. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

iii. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

(xiii) **CCINP 102** :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

(a) Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.

(b) On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».

i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.

ii. Reconnaître la loi de Y. ~~En déduire $E(Y)$.~~

(xiv) **CCINP 103** : **Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

(a) i. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

ii. ~~En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.~~

(b) Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
Déterminer la loi de X.

Extrait du programme de MPSI

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle. Loi P_X de la variable aléatoire X. Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$. L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
b) Lois usuelles	
	La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.
Loi uniforme. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.	Notation $\mathscr{B}(p)$. Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.	Notation $\mathscr{B}(n, p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.
c) Couples de variables aléatoires	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y), les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	
d) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont indépendantes : $$P\big((X, Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)\ P(Y \in B).$$	
Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants. Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$. Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.	