

CHAPITRE XXI

# Équations Différentielles Linéaires

$I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie non nulle,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$$B : t \mapsto \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$$

Une solution de (L) est une application  $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$  au moins dérivable sur  $I$  et vérifiant

$$\forall t \in I \quad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) + B(t).$$

## GÉNÉRALITÉS

### 1 Position du problème

On s'intéresse à des systèmes différentiels du type

$$\begin{cases} x_1' &= a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \dots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \dots + a_{2,n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_n' &= a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \dots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

les fonctions  $a_{i,j}$  et  $b_i$  étant données.

On cherche les solutions d'un tel systèmes, c'est-à-dire les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  dérivables sur un certain intervalle  $I$  telles que, pour tout  $t$  dans  $I$ ,

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) &= a_{1,1}(t)\varphi_1(t) + a_{1,2}(t)\varphi_2(t) + \dots + a_{1,n}(t)\varphi_n(t) + b_1(t) \\ \varphi_2'(t) &= a_{2,1}(t)\varphi_1(t) + a_{2,2}(t)\varphi_2(t) + \dots + a_{2,n}(t)\varphi_n(t) + b_2(t) \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_n'(t) &= a_{n,1}(t)\varphi_1(t) + a_{n,2}(t)\varphi_2(t) + \dots + a_{n,n}(t)\varphi_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

### 2 Écriture matricielle

Un système différentiel linéaire s'écrit matriciellement

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{L}$$

où  $A$  est la fonction à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont les fonctions composantes dans la base ca-

nonique sont les  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , autrement dit  $A : t \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  et

### 3 Équation scalaire d'ordre $n$

#### Définition

Si  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$  sont définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , on appelle solution de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t) \tag{L}$$

toute fonction  $f$   $n$  fois dérivable sur  $I$  telle que pour tout  $t \in I$ ,  $f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)} + \dots + a_0(t)f(t) = b(t)$ .

#### Propriété

Une telle équation se réécrit sous forme d'un système différentiel  $Y' = A(t)Y + B(t)$  en

$$\text{posant } Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

## 4 Problèmes de Cauchy et théorème de Cauchy linéaire

### Propriété

Soit  $A$  et  $B$  deux applications continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  respectivement,  $t_0 \in I$  et  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

$\Phi$  est solution du **problème de Cauchy**  $\begin{cases} \forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$

si et seulement si  $\Phi \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$  telle

$$\forall t \in I, \Phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [A(u)\Phi(u) + B(u)] du.$$

### Théorème : de Cauchy linéaire

Soit  $A$  et  $B$  deux applications **continues sur**  $I$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  respectivement,  $t_0 \in I$  et  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

### Corollaire : Cas des équations scalaires d'ordre $n$

Si  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$  sont continues sur  $I$ , si  $t_0 \in I$ , si  $(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ , il existe une unique solution  $f$  sur  $I$  de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t) \quad (L)$$

telle que  $f(t_0) = y_0, f'(t_0) = y_1, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$  (encore appelé **problème de Cauchy**).

## 5 Point de vue vectoriel

### Propriété

Soit  $a$  et  $b$  deux applications continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $E$  respectivement,  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in E$ .

$f$  est solution du **problème de Cauchy**  $\begin{cases} \forall t \in I, x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

si et seulement si  $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$  telle

$$\forall t \in I, f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t ([a(u)](f(u)) + b(u)) du.$$

### Théorème : de Cauchy linéaire

Soit  $a$  et  $b$  deux applications continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $E$  respectivement,  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in E$ . Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [a(t)](x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

## 6 Principe de superposition

### Propriété

Soient  $A, B$  deux applications continues sur  $I$  à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  respectivement tel que  $B = \sum_{i=1}^p \lambda_i B_i$  où les  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  et les  $B_i$  sont continues de  $I$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

Si, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\Phi_i$  est une solution de  $(E_i) \quad X' = A(t)X + B_i(t)$ , alors  $\sum_{i=1}^p \lambda_i \Phi_i$  est solution de  $(E) \quad X' = A(t)X + B(t)$ .

## II STRUCTURE DE L'ESPACE DES SOLUTIONS

### 1 Équation homogène

#### Théorème : de structure de l'équation homogène

Si  $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  et  $B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ ,  $S_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ , et  $\dim S_H = n$ .

**Propriété**

Pour tout  $t_0 \in I$  et tout  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $\Phi \mapsto \Phi(t_0)$  est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) de  $S_H$  sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

**Corollaire**

Si  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont continues sur  $I$ , l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = 0$$

est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

## 2 Équation complète

**Définition**

On dit que la partie  $\mathcal{F}$  de l'espace vectoriel  $E$  est un sous-espace affine de  $E$  lorsqu'il existe un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  et un  $x \in E$  tels que

$$\mathcal{F} = x + F = \{x + u, \quad u \in F\}$$

$F$  est alors unique, et est appelé direction de  $\mathcal{F}$ . En revanche, pour n'importe quel  $x \in \mathcal{F}$ , on a  $\mathcal{F} = x + F$ .

**Théorème : de structure de l'équation complète**

L'ensemble  $S_L$  des solutions de l'équation « complète »  $(L)$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ , de direction  $S_H$ , donc de dimension  $n$ .

**Corollaire**

Si  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$  sont continues sur  $I$ , l'ensemble des solutions de l'équation « complète »

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t)$$

est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée, donc de dimension  $n$ .

## 3 Système fondamental de solutions

**Définition**

On appelle **système fondamental de solutions** de l'équation homogène toute base  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  de  $S_H$ .

## 4 Méthode de variation des constantes

**Lemme**

Soit  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  un système fondamental de solution de l'équation homogène  $(H)$ . Alors pour tout  $t \in I$ ,  $(\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t))$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .



**Méthode : Variation des constantes**

Soit  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  un système fondamental de solution de l'équation homogène  $(H)$ .

Alors il existe des fonctions  $t \mapsto \lambda_1(t), \dots, t \mapsto \lambda_n(t)$  dérivables sur  $I$  telles que

$$\Psi : t \mapsto \Psi(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(t)\Phi_k(t) \text{ soit une solution de } (L).$$

# III ÉDL SCALAIRES D'ORDRE 2

## 1 Position du problème, système associé

Les équations différentielles linéaire d'ordre 1 ont été étudiées en première année et les résultats des parties précédentes permettent de retrouver ceux du programme de MPSI.

Les équations différentielles linéaire d'ordre 2 étudiées alors se restreignaient au cas des coefficients constant et d'un second membre combinaison linéaire de « polynômes-exponentielles ».

La théorie vue cette année permet d'étendre l'étude à toutes les équations à coefficients et second membre continus.

On suppose donc que  $a, b, c, d$  sont quatre fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On s'intéresse à l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \tag{L}$$

d'équation homogène associée

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{H}$$

On se ramène à un système différentiel d'ordre 1 en **supposant que  $a$  ne s'annule pas sur  $I$**  (très important) et en posant  $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$  :

$$Y' = A(x)Y + B(x) \tag{L_{mat}}$$

où  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(x)}{a(x)} & -\frac{b(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$ ,  $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$  :  $f$  est solution de  $(L)$  si et seulement si  $\Phi = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$  est solution de  $(L_{mat})$ .

## 2 Existence et unicité, structure

### Théorème

On suppose, toujours, que  $a, b, c, d$  sont continues sur  $I$  et que  $a$  ne s'annule pas sur  $I$ .

- Pour tout  $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ , il existe une unique solution  $f$  de  $(L)$  telle que  $f(t_0) = y_0$  et  $f'(t_0) = y'_0$  (problème de Cauchy).
- L'ensemble  $S_H$  des solutions de  $(H)$  est un plan vectoriel de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$  (donc de dimension 2).
- Pour tout  $t_0 \in I$ ,  $f \mapsto (f(t_0), f'(t_0))$  est un isomorphisme de  $S_H$  dans  $\mathbb{K}^2$ .
- L'ensemble  $S_L$  des solutions de  $(L)$  est un plan affine de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ , de direction  $S_H$  :  $S_L = f_0 + S_H$  où  $f_0$  est une solution particulière.
- Le principe de superposition s'applique.

## 3 Wronskien

### Définition : Wronskien

Si  $f, g$  sont deux solutions de  $(H)$  sur  $I$ , on définit sur  $I$  leur **wronskien**

$$w(f, g) : x \mapsto \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x).$$

### Propriété

Soit  $f, g$  deux solutions de l'équation différentielle homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \quad (H)$$

où  $a, b, c$  sont trois fonctions continues sur  $I$ ,  $a$  ne s'annulant pas sur  $I$ . On note  $w$  (au lieu de  $w(f, g)$ ) le wronskien de  $f$  et  $g$ . Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(f, g)$  est un système fondamental de solutions (ie une base de  $S_H$ ).
- $\forall x \in I, w(x) \neq 0$ .
- $\exists x \in I, w(x) \neq 0$ .

## 4 Cas où on connaît déjà une solution de $(H)$



### Méthode

Lorsqu'une solution  $f$  de  $(H)$  est connue et ne s'annule pas sur  $I$ , on peut chercher une deuxième solution sous la forme  $g : x \mapsto \lambda(x)f(x)$  avec  $\lambda$  deux fois dérivable. C'est une méthode de variation de la constante.

Si  $f$  s'annule, cela peut aussi fonctionner parfois.

## 5 Cas où les coefficients sont polynomiaux



### Méthode

Lorsque les coefficients et le second membre sont polynomiaux, on peut essayer l'une des méthodes suivantes pour trouver des solutions de  $(H)$

- Trouver une solution sous la forme  $x \mapsto x^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  : particulièrement efficace pour les équations de la forme  $\beta x^2 y'' + \gamma x y' + \delta y = 0$  où  $\beta, \gamma, \delta$  sont des scalaires, dites d'Euler.
- Trouver des solutions polynomiales, en commençant par les termes de plus haut degré pour trouver le degré.
- Trouver des solutions DSE.
- Lorsque l'on connaît déjà une solution, utiliser la méthode du paragraphe précédent.

## 6 Variation des constantes



### Méthode : Variation des constantes

Connaissant un système fondamental  $(f, g)$  de  $(H)$ , on cherche une solution particulière  $f_0$  de  $(L)$  telle que  $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$  avec  $\lambda, \mu$  deux fonctions dérivables sur  $I$ .

Cela revient à poser supposer  $f_0 = \lambda f + \mu g$ ,  $f_0' = \lambda f' + \mu g'$  et alors  $\lambda' f + \mu' g = 0$ .

En réinjectant dans l'équation  $(L)$ , on trouve un système en  $\lambda'$  et  $\mu'$  puis on les détermine et on primitive.

Ce système sera systématiquement  $\lambda' \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{dx} \end{pmatrix}$  où  $\frac{d}{dx}$  est le second membre de l'équation normalisée.

## IV EXEMPLES D'ÉDL SCALAIRES NON RÉSOUES



### Méthode

Pour résoudre une équation différentielle scalaire non résolue, on résout classiquement sur chaque intervalle  $I_k$  sur lequel  $a$  ne s'annule pas en prenant soin d'indexer la ou les constantes par l'indice  $k$  de l'intervalle. Puis, on fait un raccord de solution en raisonnant par analyse-synthèse.

- On traduit qu'on est solution sur chaque intervalle  $I_k$  avec l'expression trouvée.
- On traduit l'équation aux point d'annulation de  $a$  pour obtenir éventuellement la valeur de la solution en ces points.
- On traduit la dérivabilité de la solution aux point de raccord en commençant en général par s'intéresser à la continuité.

Pour la dérivabilité, on utilise des taux d'accroissement ou des développements limités.

Le théorème de la limite de la dérivée est intéressant, mais on peut avoir des solutions dérivables au point de raccord sans être de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Une fois les informations trouver sur les constantes, la synthèse valide les solutions.

## V EXPONENTIELLE D'ENDOMORPHISME ET DE MATRICE

### 1 Définition

#### Définition

Une norme  $N$  sur une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$  est dite **sous-multiplicative** si pour tout  $(a, b) \in \mathcal{A}^2$ ,  $N(ab) \leq N(a)N(b)$ .

On parle aussi de **norme d'algèbre**.

#### Propriété

On a alors, pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $N(a^k) \leq N(a)^k$ .

#### Corollaire

Pour tout  $a \in \mathcal{L}(E)$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!}$  est absolument convergente.

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$  est absolument convergente.

#### Définition : Exponentielle d'endomorphisme et de matrices

Pour tout  $a \in \mathcal{L}(E)$ , on note  $\exp a = e^a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ .

Pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $\exp A = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ .

### 2 Propriétés

#### Propriété

Si  $A$  matrice représentant  $a \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\exp A$  représente  $\exp a$  dans la même base.

#### Propriété

Soit  $a, b \in \mathcal{L}(E)$ .

(i) Si  $a \circ b = b \circ a$ ,  $\exp(a) \circ b = b \circ \exp(a)$ .

(ii) Si  $a \circ b = b \circ a$ ,

$$\exp(a) \circ \exp(b) = \exp(b) \circ \exp(a).$$

(iii) Pour tout  $t \in \mathbb{K}$ ,  $\exp(t \text{id}_E) = e^t \text{id}_E$ .

(iv)  $\exp(0) = \text{id}_E$ .

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

(i) Si  $AB = BA$ ,  $\exp(A)B = B \exp(A)$ .

(ii) Si  $AB = BA$ ,

$$\exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A).$$

(iii) Pour tout  $t \in \mathbb{K}$ ,  $\exp(tI_n) = e^t I_n$ .

(iv)  $\exp(0_n) = I_n$ .

#### Propriété

Les applications  $\exp : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ a \mapsto \exp a \end{array}$  et  $\exp : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto \exp A \end{array}$  sont continues.

**Propriété**

Soient  $a \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Les applications  $\phi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ t \mapsto \exp(ta) \end{cases}$  et  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \mapsto \exp(tA) \end{cases}$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi'(t) = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = A \times \exp(tA) = \exp(tA) \times A.$$

**Propriété**

Si  $a, b \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $a \circ b = b \circ a$ ,  $\exp(a + b) = \exp a \circ \exp b = \exp b \circ \exp a$ .

Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $AB = BA$ ,  $\exp(A + B) = \exp A \times \exp B = \exp B \times \exp A$ .

**Corollaire**

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$\begin{aligned} \exp(a) \in \mathcal{GL}(E) \quad \text{et} \quad \exp(a)^{-1} &= \exp(-a) \\ \exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \exp(A)^{-1} &= \exp(-A) \end{aligned}$$

**Propriété**

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$ .

**Propriété**

$$\bullet \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

• Si  $N$  est nilpotente d'indice  $p$ ,  $\exp N = I_n + N + \frac{1}{2!}N^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}$ .

### 3 Application à la résolution de systèmes différentiels à coefficients constants

**Théorème**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

Les solutions à l'équation différentielle  $X' = AX$  sont les fonctions  $t \mapsto \exp(tA)C$  où  $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

L'unique solution au problème de Cauchy  $X' = AX$  et  $X(t_0) = X_0$  est la fonction  $t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$ .



**Méthode : Cas diagonalisable**

On souhaite résoudre une équation  $X' = AX$  où  $A$  est une matrice **constante** diagonalisable. On diagonalise :  $A = PDP^{-1}$  et on pose  $Y = P^{-1}X$  ce qui se ramène à  $Y' = DY$  qui se résout très simplement (système différentiel diagonal). Reste à écrire  $X = PY$  pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer  $P^{-1}$ ).

On obtient alors, en notant  $V_1, \dots, V_n$  la base de vecteurs propres constituant les colonnes de  $P$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  correspondantes, que les solutions sont les

$$t \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{\lambda_k t} V_k$$

pour  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$ . On retrouve ce résultat en exprimant les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tD) \times P^{-1}C = P \times \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \times C' = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} V_1 & \dots & e^{\lambda_n t} V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$



**Méthode : Cas trigonalisable non diagonalisable**

On souhaite résoudre une équation  $X' = AX$  où  $A$  est une matrice **constante** trigonalisable non diagonalisable.

On trigonalise :  $A = PTP^{-1}$  et on pose  $Y = P^{-1}X$  ce qui se ramène à  $Y' = TY$  triangulaire qui se résout de bas en haut. Reste à écrire  $X = PY$  pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer  $P^{-1}$ ).

De nouveau, on peut exprimer les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tT) \times P^{-1}C$$

où  $\exp(tT)$  est encore triangulaire, avec, sur la diagonale, les exponentielles des coefficients diagonaux de  $tT$ , mais les autres coefficients ne se calculent pas simplement en général.



**Méthode : Cas non trigonalisable**

On souhaite résoudre une équation  $X' = AX$  où  $A$  est une matrice **constante** non trigonalisable. Alors  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . On résout dans  $\mathbb{C}$  et on cherche les solutions réelles.