Variables aléatoires discrètes

I VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

On se donne une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1 Définition

Définition : Variable aléatoire discrète

Soit E un ensemble quelconque. Une application $X : \Omega \to E$ est appelée **variable aléatoire discrète** sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ lorsqu'elle vérifie

(i) $X(\Omega) = \operatorname{Im} X = \{X(\omega), \omega \in \Omega\} \in \mathscr{P}(E)$ est fini ou dénombrable.

(ii) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$ et est noté $(X = x)$.

Elle est dite **réelle** lorsque $E \subset \mathbb{R}$.

Définition - Propriété

$\big((X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements adapté à** X.

Propriété : Les parties de $X(\Omega)$ sont des événements

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Alors pour toute partie A de $X(\Omega)$, $(X \in A) \in \mathscr{A}$.

Propriété : Une fonction d'une v.a.d. est une v.a.d.

Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, si $f : E \to F$ est une fonction (ou application) quelconque, alors $f \circ X$, notée $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

2 Loi

On fixe X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Définition : Loi d'une v.a.d.

L'application

$$\mathbb{P}_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array} \right.$$

est appelée **loi de** X.

Propriété

$\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $\big(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega))\big)$.

Propriété

Si $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}_X(\{a\}) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a)$.

Corollaire

La loi de X est uniquement déterminée par la donnée de $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, famille sommable de réels dans $[0,1]$ de somme 1.

Notation

Si X et Y suivent la même loi, on note $X \sim Y$.

Si X suit une loi $\mathscr{L}$, on note $X \sim \mathscr{L}$ (programme de MP) ou $X \hookrightarrow \mathscr{L}$ (programme de PSI et PC).

Propriété

La loi de $Y = f(X)$ est donnée par

$$\forall\, y \in f(X(\Omega)),\ \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(f(X) = y) = \mathbb{P}\Big(X \in f^{-1}(\{y\})\Big) = \sum_{x \,|\, f(x) = y} \mathbb{P}(X = x).$$

Propriété

Si X et Y sont des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X+Y=z) = \sum_{x,y \mid x+y=z} \mathbb{P}\big(X=x, Y=y\big)$$
$$\text{et} \quad \mathbb{P}(XY=z) = \sum_{x,y \mid xy=z} \mathbb{P}\big(X=x, Y=y\big)$$

II FAMILLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé.

1 Définition et lois

a Couple de variables aléatoires discrètes

Définition - Propriété

Soit X, Y variables aléatoires discrètes sur Ω à valeurs dans E, E'. L'application

$$Z : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est une variable aléatoire discrète appelée **couple** $Z = (X, Y)$.

Propriété

*Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Alors la famille d'événements $\big(((X,Y)=(x,y))\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé au couple** (X, Y).*

b Loi conjointe

Définition : Loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires discrètes. On appelle **loi conjointe** de (X, Y) la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X, Y).

c Lois marginales

Définition : Lois marginales

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires discrètes, les lois de X et de Y sont appelées **première et seconde lois marginales du couple.**

Propriété

La loi conjointe de (X, Y) détermine les lois marginales de (X, Y) mais la réciproque est fausse.

d Lois conditionnelles

Définition : Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x)$ est la loi de Y pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=x)}$. Elle est donc déterminée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

2 Extension aux n-uplets

Définition : n-uplets de variables aléatoires

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires discrètes. C'est encore une variable aléatoire discrète appelé **vecteur aléatoire discret** de dimension n.

La **loi conjointe** de $(X_1, \dots, X_n)$ est déterminée par les $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ où pour tout i, $x_i \in X_i(\Omega)$.

Les lois de $X_1, \dots, X_n$ sont les **lois marginales** de $(X_1, \dots, X_n)$.

Définition : Loi conditionnelle pour n variables

Si $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont fixés, tel que $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$, la **loi conditionnelle** de X_n sachant $(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$ est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})}$$

pour tout x_n.

3 Indépendance

a Cas d'un couple de variable

Définition : Indépendance

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

X et Y sont dites **indépendantes** si pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\ \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note parfois $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Propriété

X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\ \mathbb{P}(Y = y).$$

Propriété

Soit (X, Y) couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre

(i) *Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.*

(ii) *Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, la loi de X sachant $(Y = y)$ est la même que la loi de X.*

(iii) *Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, la loi de Y sachant $(X = x)$ est la même que la loi de Y.*

b Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition

Des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont dites **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega)$, ..., A_n de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1)$, ..., $(X_n \in A_n)$ le sont.

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes est une suite de variables aléatoire (mutuellement) indépendantes lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_, \dots, X_n$ le sont.

Si, de plus, elles ont même loi, on dit que ce sont des **variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées** (vaiid).

Propriété

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1)$, ..., $(X_n = x_n)$ le sont.

Propriété

Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, $f_1, \dots, f_n$ définies sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$, alors $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Propriété : Lemme des coalitions

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 < m < n$, $X_1, \dots, X_m, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, f définie sur $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_m(\Omega)$ et g définie sur $X_{m+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$.

Alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Théorème

Soit $(\mathscr{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités discrètes.
Il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{L}_n$.

III LOIS USUELLES

1 Loi Uniforme

Définition : Loi uniforme

On dit que qu'une variable aléatoire **finie** X suit une **loi uniforme** lorsque pour tout $x\in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X=x) = \frac{1}{n}$$

où $n=|X(\Omega)|$, c'est-à-dire que pour tout $A\subset X(\Omega)$, $\mathbb{P}_X(A)=\dfrac{|A|}{n}$.
On note alors $X\sim\mathscr{U}(n)$ ou $X\hookrightarrow\mathscr{U}(n)$.

2 Loi de Bernoulli

Définition : Loi de Bernoulli

On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p\in[0,1]$ lorsque X est à valeurs dans $E=\{0,1\}$, $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=q=1-p$.
On note alors $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$ ou $X\sim\mathscr{B}(p)$.

Exemple : Situation type

Variable aléatoire étudiant le succès (1) d'un événement donné ou son échec (0).

Propriété

Les variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p sont exactement les fonctions indicatrices des parties F de Ω telles que $\mathbb{P}(F)=p$.

3 Loi binomiale

Définition : Loi binomiale

On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre** (n,p) **où** $p\in[0,1]$ lorsque X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

avec $q=1-p$. On note alors $X\sim\mathscr{B}(n,p)$ ou $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple : Situation type

Nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes.

4 Loi géométrique

Définition : Loi géométrique

Soit $p\in]0,1[$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une **loi géométrique** de paramètre p si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}.$$

On note $X\sim\mathscr{G}(p)$ ou $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$.

Exemple : Situation type

Le rang du premier succès dans une répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit $\mathscr{G}(p)$.

5 Loi de Poisson

Définition : Loi de Poisson

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre** λ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

c Approximation d'une loi de Poisson par des lois binomiales

Propriété

Soit $\lambda > 0$, $(p_n)_n \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ tel que $np_n \to \lambda$, $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

6 Propriétés des lois usuelles

a Somme de n vaiid de Bernoulli

Propriété : Importante !

Si $X_1, \dots, X_n$ vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

b Variables aléatoires sans mémoire et loi géométrique

Définition : Variable aléatoire sans mémoire

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$. On dit que X est sans mémoire lorsque

$$\forall\,(n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \ \mathbb{P}(X > n+k | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$$

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n) \neq 0$.

Propriété : Caractérisation des lois géométriques

Les variables aléatoires X sans mémoire sont exactement les variables aléatoires suivant une loi géométrique, de paramètre $p = \mathbb{P}(X=1)$.

IV ESPÉRANCE

1 Définition

Définition : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle positive

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
L'**espérance de** X est, par définition,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)x.$$

On a donc $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ suivant la sommabilité ou non de la famille réelle positive $(\mathbb{P}(X=x)x)_{x\in X(\Omega)}$.

Définition : Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Lorsque la famille $(\mathbb{P}(X=x)\ x)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, on dit que X **est d'espérance finie**, et on définit son **espérance**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)x.$$

Dans le cas contraire, X n'a pas d'espérance (pas plus infinie que finie)
Lorsque X est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = 0$, X est dite **centrée**.

2 Théorème de transfert

Théorème

Soit X un variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, f une fonction définie sur $X(\Omega)$, à valeurs réelles.

$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(\mathbb{P}(X=x)\ f(x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)f(x).$$

Corollaire

X a une espérance finie si et seulement si $|X|$ a une espérance finie.
Le cas échéant, $\mathbb{E}(|X|)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)\,|x|$.

Corollaire

Uniquement dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, X est d'espérance finie si et seulement si $(\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega))_{\omega\in\Omega}$ est sommable et dans ce cas

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega).$$

3 Propriétés de l'espérance

Propriété

X et Y désignent deux variables aléatoires réelles discrètes.

(i) *Si X est constante presque sûrement, c'est-à-dire qu'on a $a\in\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X=a)=1$, alors elle est d'espérance finie $\mathbb{E}(X)=a$.*

(ii) ***Linéarité*** *: si X,Y sont d'espérances finies et $\lambda\in\mathbb{R}$, $X+\lambda Y$ l'est et $\mathbb{E}(X+\lambda Y)=\mathbb{E}(X)+\lambda\mathbb{E}(Y)$.*

(iii) ***Positivité*** *: si $X\geqslant 0$ d'espérance finie, alors $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$.*
De plus (positivité améliorée), si $X\geqslant 0$ et $\mathbb{E}(X)=0$, alors X est nulle presque sûrement.

(iv) ***Croissance*** *: si $X\leqslant Y$ d'espérances finies, alors $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$.*

(v) *Si X est d'espérance finie, $X-\mathbb{E}(X)$ est centrée et appelée* ***variable aléatoire centrée associée à*** *X.*

(vi) ***Inégalité triangulaire*** *: Si X est d'espérance finie, $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(|X|)$.*

(vii) *Si Y est d'espérance finie et $|X|\leqslant Y$, alors X l'est et $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(Y)$.*
En particulier, si X est bornée, elle est d'espérance finie.

Notation

L'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ admettant une espérance finie est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel noté $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ et $X\mapsto\mathbb{E}(X)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$.

4 Espérances des lois usuelles

Propriété : Espérance des lois usuelles

(i) *Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X)=p$.*

(ii) *Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbb{E}(X)=np$.*

(iii) *Si $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$, alors $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}$.*

(iv) *Si $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(X)=\lambda$.*

Corollaire

Soit A un événement de notre tribu $\mathscr{A}$. Alors $\mathbb{1}_A$ a une espérance finie et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)=\mathbb{P}(A)$.

5 Inégalité de Markov

Propriété

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance finie. Pour tout $a>0$,

$$\mathbb{P}(|X|\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

6 Espérance et indépendance

Propriété

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance finie. Alors XY a une espérance finie, et

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Réciproque fausse en général.

V VARIANCE ET COVARIANCE

1 Moments

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soit $p \geqslant 1$ (p réel).
On dit que X **admet un moment d'ordre** p lorsque X^p est d'espérance finie.
Le **moment d'ordre** p de X est alors

$$\mathbb{E}(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) x^p.$$

On note $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires admettant un moment d'ordre p.

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ont des moments d'ordre 2, leur produit est d'espérance finie, et

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right) \mathbb{E}\left(Y^2\right)$$

Corollaire

$\mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété

Si une variable aléatoire réelle discrète admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

2 Variance et écart-type

Définition : Variance, écart-type, variable réduite

Soit X un variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **variance** de X le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}$.
Lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$, X est dite **réduite**.

Propriétés

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.

(i) ***Théorème de Kœnig-Huygens*** *:* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.

(ii) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(x)$ donc $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$.

(iii) Si $\sigma(X) \neq 0$, $m = \mathbb{E}(X)$, $\dfrac{X - m}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, appelée ***variable aléatoire centrée réduite associée à X****.*

3 Covariance

Définition : Covariance

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.
On appelle **covariance** du couple (X, Y) le nombre

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, X et Y sont dites **non corrélées**.

Propriété

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrète admettant un moment d'ordre 2.

(i) Cov *est une forme bilinéaire positive.*

(ii) ***Théorème de Kœnig-Huygens*** *:* $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

(iii) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)$.

(iv) Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et la réciproque est fausse.

4 Variance d'une somme de variables aléatoires

Propriété

Soient $X_1,\dots,X_n$, n variables aléatoires réelles discrète admettant un moment d'ordre 2.

(i) $X_1+\dots+X_n$ *admet un moment d'ordre 2 et*

$$\mathbb{V}(X_1+\dots+X_n)=\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{Cov}\left(X_i,X_j\right).$$

(ii) Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes deux à deux,

$$\mathbb{V}(X_1+\dots+X_n)=\mathbb{V}(X_1)+\dots+\mathbb{V}(X_n).$$

En particulier, si $X_1,\dots,X_n$ sont des vaiid, $\mathbb{V}(X_1+\dots+X_n)=n\mathbb{V}(X_1)$.

5 Cas des lois usuelles

Propriété

(i) Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$, $\mathbb{E}(X)=p$ et $\mathbb{V}(X)=p(1-p)=pq$.

(ii) Si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, $\mathbb{E}(X)=np$ et $\mathbb{V}(X)=np(1-p)=npq$.

(iii) Si $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}=\dfrac{q}{p^2}$.

(iv) Si $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X)=\mathbb{V}(X)=\lambda$.

VI Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et Loi faible des grands nombres

Propriété : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, $m=\mathbb{E}(X)$, $a>0$.

$$\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant a\right)\leqslant\frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

c'est-à-dire, en notant m l'espérance de X et σ son écart-type,

$$\mathbb{P}\left(|X-m|\geqslant a\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{a^2}$$

Théorème : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variable aléatoires discrètes réelles deux à deux indépendantes identiquement distribuées (de même loi) sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, admettant un moment d'ordre 2. Soit m l'espérance de X_n et σ son écart-type.

On pose enfin $S_n=X_1+\dots+X_n$.

Pour tout $\epsilon>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Lemme

Sous les mêmes conditions, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

VII Fonctions génératrices

Dans cette partie, les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1 Définition

Définition : Fonction génératrice

Soit X variable aléatoire discrète sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ **à valeurs dans** $\mathbb{N}$.

On appelle **fonction génératrice associée à** X la fonction $G_X : t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n$.

Propriétés

(i) Le rayon de convergence de la série entière $\sum\mathbb{P}(X=n)t^n$ est au moins égal à 1, et elle converge normalement sur $[-1,1]$.

(ii) Pour tout $t\in[-1,1]$, $G_X(t)=\mathbb{E}\left(t^X\right)$.

(iii) G_X est continue sur $[-1,1]$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n)=\dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Propriété : Caractérisation de la loi

Deux variables aléatoires X, Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.

Propriété

(i) X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable est 1 et alors $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

(ii) X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable est 1 et alors $\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1)$. On exprime alors $\mathbb{V}(X)$ à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

2 Somme des variables aléatoires

Propriété

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors

$$G_{X_1+\cdots+X_n} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}.$$

VIII FORMULAIRE

- **Loi de X :** $\mathbb{P}_X : A \mapsto \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x)$ déterminée par les $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$, sommables de somme 1.
- **Espérance de X :** $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)x$ et si Ω fini ou dénombrable $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$.
- **Formule de transfert :** $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x)$.
- **Variance de X :** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.
- **Covariance de X et Y :** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ nulle si indépendantes.
- **Variance d'une somme :** $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$.
- **Inégalité de Markov :** Si $a > 0$, $\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$.
- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** Si $a > 0$, $\mathbb{P}(|X-m| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2}$ où $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
- **Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$:**

  $\mathbb{P}(X=1) = p$ $\quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$ $\quad \mathbb{E}(X) = p$ $\quad \mathbb{V}(X) = pq$ $\quad G_X(t) = q + pt$
- **Loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$:**

  $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $\quad \mathbb{E}(X) = np$ $\quad \mathbb{V}(X) = npq$ $\quad G_X(t) = (q+pt)^n$.
- **Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$:**

  $p \in]0,1[$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = pq^{n-1}$ $\quad \mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ $\quad \mathbb{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$ $\quad G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$
- **Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$:**

  $\lambda > 0$ $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ $\quad \mathbb{E}(X) = \lambda$ $\quad \mathbb{V}(X) = \lambda$ $\quad G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$