Espaces préhilbertiens réels

- Faire des dessins.
- Pour montrer qu'une application est un produit scalaire, pas de secret : symétrie, linéarité (à gauche ou à droite), définie-positivité.
- Lors de calculs avec des normes euclidiennes, on utilise souvent $\|\cdot\|^2$ et on peut faire intervenir le produit scalaire.
- Pour établir une inégalité faisant intervenir norme et produit scalaire on pensera à utiliser les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski (inégalité triangulaire).
- Pour montrer qu'un vecteur est nul, on peut montrer qu'il est orthogonal à tout vecteur, ou encore qu'il est orthogonal à lui-même. (Et deux vecteurs sont égaux si leur différence est le vecteur nul !)
- Faire des dessins en dimension 2 ou 3 peut être une bonne idée pour "visualiser" ce que l'on veut démontrer.
- Jusqu'à présent, lorsque l'on devait démontrer qu'un extremum était atteint, on pensait à des arguments de continuité et compacité. Pour l'unicité, souvent les arguments sont de convexité ou de calcul de dérivée (ou de différentielle) pour la recherche de points critiques. Il faut maintenant penser, pour des problèmes de minimum, au théorème de projection sur un sous-espace de dimension finie. Si on pense que c'est cela qu'il faut appliquer, on définit un produit scalaire convenable et un sous-espace qui permet de résoudre le problème.
- Les problèmes de polynômes orthogonaux interviennent dans de nombreux énoncés.
- L'orthonormalisation de Schmidt peut souvent être remplacée par une orthogonalisation, plus légère. Il faut avoir présente à l'esprit l'interprétation de l'orthonormalisation de Schmidt en termes de projection orthogonale.

Exercices vus en cours

1 Montrer qu'on définit sur $\mathbb{R}[X]$ un produit scalaire en posant $(P|Q)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, et en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.

2 Définir sur $\mathbb{R}_n[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$, un produit scalaire rendant la base canonique orthonormale.

3 Si I est un intervalle et $L^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable, montrer que $L^2(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $(f|g)=\int_I fg$ définit un produit scalaire sur $L^2(I)$.

4 **CCINP 76** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x\in E$, $||x||=\sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E=\left\{f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x\in[a,b]\ f(x)>0\right\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f\in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

5 **CCINP 79** Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0\Longrightarrow h=0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall(f,g)\in E^2$, $(f|g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

6 Orthonormaliser la base $e_1=(0,1,1)$, $e_2=(1,0,1)$, $e_3=(1,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

7 Dans $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1. Montrer que $F^\perp=\{0\}$ en utilisant le théorème de Weierstraß.
2. En déduire que $F\subsetneq\left(F^\perp\right)^\perp=E$.
3. Soit $G=\{t\mapsto P(t)\sin(t)\ ;\ P\in F\}$. Montrer que $G^\perp=\{0\}$ et en déduire que $(F\cap G)^\perp\supsetneq F^\perp+G^\perp$.
4. Montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x\mapsto\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Que vaut $\mathrm{d}(\exp,F)$? Est-elle atteinte ?
5. Montrer plus généralement que si $\mathrm{d}(f,F)$ est atteinte pour un $g\in F$, alors $f-g\in F^\perp$. Pour quelles fonctions est-ce le cas ?

8 **CCINP 39** On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$, la série $\sum x_ny_n$ converge.
   On pose alors $(x|y)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_ny_n$.
   (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
   On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $x=(x_n)\in\ell^2$, on pose $\varphi(x)=x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

9 **CCINP 77** Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

10 $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

11 **CCINP 92** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^{\perp} = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^{\perp}$.

12 **CCINP 80**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

13 Soit $E = \mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à p ?

14 **CCINP 81** On définit dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$, où $\mathrm{tr}\left({}^tAA'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathscr{F}^{\perp}$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$ sur $\mathscr{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathscr{F}$.

15 **CCINP 82** Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

16 Déterminer les équations des bissectrices, dans un repère orthonormal du plan, de $\mathscr{D} : 3x + 4y = 7$ et $\mathscr{D}' : 5x - 12y = -7$.

Produit scalaire

17 **Le retour des polynômes de Tchebbychev**

1. Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles :
   $$\langle P, Q\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P(t)Q(t)\,dt$$
   On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation, valable pour tout n entier naturel et tout réel θ , $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Démontrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale ce produit scalaire.
2. Soit E l'espace $C([-1,1],\mathbf{R})$. Montrer que, si $(f,g) \in E^2$,
   $$\langle f, g\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t)\,dt$$
   est bien défini. Montrer que l'on construit ainsi un produit scalaire sur E, et que la famille $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale.

18 Soient f et g des applications de E dans E telles que
$$\forall (x,y) \in E^2,\ (f(x)|y) = (x|g(y)).$$
Montrer que f et g sont linéaires.

19 Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t)Q(t)dt$$

1. Démontrer qu'il existe une unique suite orthogonale de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, tels que pour tout n, P_n soit unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré n.
2. Démontrer qu'il existe deux suites (λ_n) et (μ_n) de réels telles que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$P_n = (X-\lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$$

(indication : décomposer XP_{n-1} dans la base des P_k).

20 **Écrit Mines – CCINP** On considère le produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)\ Q(t)\ dt$ sur $\mathbf{R}[X]$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une suite orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout n.
3. Soit $n \geqslant 2$. On suppose que P_n possède k racines de multiplicité impaire dans $]0,1[$, $a_1, \ldots, a_k$, avec $k < n$.
   (a) Vérifier que, si $Q = \prod_{i=1}^{k}(X-a_i)$, alors $(P_n|Q) = 0$
   (b) En écrivant $(P_n|Q)$ sous forme intégrale, aboutir à une contradiction.
   (c) Démontrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont toutes dans $]0,1[$.
4. On fixe $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, on ait

$$\int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$

   Donner une expression de ces scalaires en fonction des intégrales sur $[0,1]$ des L_k, où les L_k désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
5. On reprend les notations de la question précédente. En utilisant la division euclidienne par P_n, montrer que

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2n-1}[X] \qquad \int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)\ .$$

   Ce type de résultat est à la base des méthodes de Gauss pour les calculs approchés d'intégrales.

21 **Décomposition QR – oral Mines**

1. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, démontrer que, si A est une matrice inversible carrée d'ordre n à coefficients réels, il existe une matrice Q orthogonale d'ordre n et une matrice R triangulaire supérieure à coefficients réels telle que

$$A = QR$$

   (on interprétera A comme matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs colonnes, et on orthonormalisera cette dernière).
2. Expliquer l'intérêt de la décomposition $A = QR$ pour la résolution d'un système $AX = B$.
3. Y-a-t-il unicité de la décomposition ?
4. On veut montrer l'inégalité de Hadamard : si M est une matrice carrée réelle, $(c_1, \ldots, c_n)$ la famille de ses vecteurs colonnes, $||.||$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$, alors

$$|\det M| \leqslant ||c_1|| \ldots ||c_n||$$

   (a) Montrer l'inégalité lorsque M n'est pas inversible.
   (b) On suppose M inversible, on l'écrit $M = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Si $(\gamma 1, \ldots, \gamma_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de R, si q est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à Q, exprimer γ_k à l'aide de q et de c_k
   (c) Conclure
   (d) Peut-il y a voir égalité dans l'inégalité de Hadamard ?

22 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de son produit scalaire canonique. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les parties de E contenant les fonctions paires et impaires respectivement.

Montrer que $\mathscr{I} = \mathscr{P}^{\perp}$ et déterminer la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

23 Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2\left(\sqrt{2}\right)^n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}.$$

24 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels. Montrer que

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\left(x_1^2 + \cdots x_n^2\right).$$

Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Projection orthogonale

25 On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Soit D la droite d'équation $x=-y=z$, s la symétrie orthogonale par rapport à D et p le projecteur orthogonal sur D.

1. Déterminer les matrices de s et p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Considérons les applications f et g définies sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y)=\langle x|p(y)\rangle \quad\text{et}\quad g(x,y)=\langle x|s(y)\rangle\,.$$

Démontrer que f et g sont des formes bilinéaires symétriques. Sont-elles définies positives ?

26 **Oral Mines** Soit $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien, p un projecteur de E.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall\, x\in E,\quad \|p(x)\|\leqslant\|x\|$.

Distance à un sous-espace

27 **Projection sur un convexe fermé – écrit CCINP** On désigne par $\mathscr{C}$ une partie convexe non vide d'un espace euclidien E.

1. On suppose $\mathscr{C}$ compacte. Démontrer que pour tout élément x de E il existe un unique élément y de $\mathscr{C}$, que l'on note $p(x)$, tel que

$$||x-y|| = \inf_{z\in\mathscr{C}}||x-z|| \quad (=d(x,\mathscr{C})).$$

Le fait que la norme soit euclidienne ne sert que pour l'unicité.

2. On suppose seulement $\mathscr{C}$ fermée. Démontrer que le résultat précédent est encore vrai.
3. Soit y un élément de $\mathscr{C}$; démontrer que

$$\Big(\ y=p(x)\ \Big) \iff \Big(\forall z\in\mathscr{C}\quad \langle y-x,y-z\rangle\leqslant 0\Big)$$

(pour $\Longrightarrow$, on pourra écrire que, si $z\in\mathscr{C}$, pour tout $t\in[0,1]$, $p(x)+t\big(z-p(x)\big)\in\mathscr{C}$).

4. En déduire, si x et x' sont deux éléments de E :

$$||p(x)-p(x')||^2\leqslant\langle x-x',p(x)-p(x')\rangle$$

puis démontrer que p est continue.

28 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on définit $v_1=(1,2,-1,1)$, $v_2=(0,3,1,-1)$ et $F=\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$.

1. Déterminer un système d'équations (dans la base canonique) et une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Soit $e_1=(1,0,0,0)$. Calculer $\mathrm{d}(e_1,F)$.

29 Calculer, pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\displaystyle\inf_{M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}\left(\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}(a_{i,j}-m_{i,j})^2\right)$

30 Pour tous réels a,b,c, on pose $I(a,b,c)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^3-ax^2-bx-c\right)^2\mathrm{d}x$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (a,b,c) tel que $I(a,b,c)$ soit minimum et le déterminer.

31 **Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit**

Si $u_1,\ldots,u_n$ sont n vecteurs d'un espace préhilbertien réel $\big(E,\langle.,.\rangle\big)$, on définit leur matrice de Gram, $G(u_1,\ldots,u_n)$, comme la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en ligne i et colonne j est $\langle u_i,u_j\rangle$.

1. Démontrer que si la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ est liée alors le déterminant de sa matrice de Gram est nul (on pourra commencer par supposer que u_n s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_i).
2. On suppose maintenant $(u_1,\ldots,u_n)$ libre, et on considère $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$. On note :

$$A=\mathscr{M}_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_1,\ldots,u_n).$$

   (a) Exprimer $G=G(u_1,\ldots,u_n)$ à l'aide d'un produit faisant intervenir A et sa transposée.

   (b) Montrer que le déterminant de G est strictement positif.

3. On suppose la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ libre ; on désigne par F le s.e.v. engendré par $(u_1,\ldots,u_n)$, et par x un vecteur de E. Démontrer :

$$\big[d(x,F)\big]^2 = \frac{\det\big(G(u_1,\ldots,u_n,x)\big)}{\det det\big(G(u_1,\ldots,u_n)\big)}$$

On pourra par exemple, dans le calcul de $\det\big(G(u_1,\ldots,u_n,x)\big)$ *écrire* $x=(x-z)+z$, *z désignant le projeté orthogonal de x sur F.*