Exercices vus en cours

1 **Le problème des clés** Au lycée Carnot, il y a beaucoup de serrures différentes, on vous a prêté un trousseau de n clefs pour ouvrir une porte, et vous avez oublié de demander laquelle était la bonne.

De plus, elles se ressemblent suffisamment pour qu'il soit impossible de deviner à vue laquelle est la plus plausible.

Vous les essayez donc l'une après l'autre.

Quelle est la probabilité pour que ce soit la k^{e} clé testée qui vous ouvre la porte ($1 \leqslant k \leqslant n$) ?

Solution de 1 : Le problème des clés

Soit A_j l'événement « la clé n° j est la bonne ».

L'événement auquel on s'intéresse est alors $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.

D'après la formule des probabilités composées, sa probabilité est (en modélisant chaque situation par une probabilité uniforme)

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_2}|\overline{A_1}\right)\cdots\mathbb{P}\left(A_k|\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-k+2}\right)\frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Logique ou non ?

2 Dans une urne se trouvent $n-1$ boules blanches, 1 boule rouge. On tire, sans remise, boule après boule. Quelle est la probabilité pour que la boule rouge sorte de l'urne au k^{e} tirage ?

3 **CCINP 101** Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.

À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Solution de 3 : CCINP 101

1. (a) (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n)$.

donc $a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
(b) De même, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$.

2. (a) A est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable.
(b) $A + \dfrac{1}{2}I_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg}\left(A + \dfrac{1}{2}I_3\right) = 1$.
Donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A) = 2$.
L'expression de $A + \dfrac{1}{2}I_3$ donne immédiatement que $E_{-\frac{1}{2}}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
(c) Puisque $\operatorname{tr}(A) = 0$, on en déduit que 1 est une valeur propre de A de multiplicité 1.
A étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires sur $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux deux à deux.
On en déduit que $\mathbb{R}^3 = E_{-\frac{1}{2}}(A) \overset{\perp}{\oplus} E_1(A)$, donc que $E_1(A) = \left(E_{-\frac{1}{2}}(A)\right)^{\perp}$.
Donc $E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, on a alors $D = P^{-1}AP$.

3. D'après la question 1., $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
Et donc on prouve par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
Or $A = PDP^{-1}$ donc $A^n = PD^nP^{-1}$.
Donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
Or, d'après l'énoncé, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ donc :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4 **CCINP 107** On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Solution de 4 : CCINP 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
   Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2.
   (U_1, U_2) est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
   On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - l$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
   Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$.
   On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.

5 Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.

On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99 % lorsqu'elle est effectivement présente.

Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1 % des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant qu'elle a été testée positive ? Commenter.

Solution de 5 :

Sur Ω l'ensemble des personnes testées, avec la probabilité uniforme. Soit M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

D'après les informations dont on dispose, $\mathbb{P}(T \mid M) = 0,99$ et $\mathbb{P}\left(T \,\middle|\, \overline{M}\right) = 10^{-3}$, $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$. Donc

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T \,\middle|\, \overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)} = \frac{0,99 \cdot 10^{-5}}{0,99 \cdot 10^{-4} + (1 - 10^{-4})10^{-3}} \approx 9\ \%.$$

Cela est dû au fait que il est rare que le test soit positif (le dénominateur vaut $\mathbb{P}(T)$) mais très très rare que l'on ait un malade ($\mathbb{P}(M)$ est très petit devant $\mathbb{P}(T)$). Proportionnellement, il y a beaucoup plus de non malades testés positifs.

6 **Le problème de Monty Hall** Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois sachant que derrière ces portes étaient dissimulées deux chèvres et une Ferrari. Une fois le choix effectué, l'animateur qui sait où est la Ferrari ouvre l'une des portes non choisies par le candidat, derrière laquelle il y a une chèvre. Il propose ensuite au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

Solution de 6 : Le problème de Monty Hall

Soit F_i l'événement « La Ferrari est derrière la porte numéro i ».

Supposons par exemple, que le candidat ait choisi la porte 1.

On a $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{3}$. (F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements.

Soit A l'événement « l'animateur ouvre la porte numéro 3 ».

On cherche $\mathbb{P}(F_2 \mid A)$ pour savoir si le candidat a intérêt à changer de porte. (Si l'animateur ouvre la porte 2, le raisonnement est le même).

D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A \mid F_3)\mathbb{P}(F_3)}$$

Or

- $\mathbb{P}(A \mid F_1) = \frac{1}{2}$ car les deux portes restantes contiennent une chèvre.
- $\mathbb{P}(A \mid F_2) = 1$ car si la Ferrari est derrière la deuxième porte, l'animateur ne peut ouvrir que la troisième porte.
- $\mathbb{P}(A \mid F_3) = 0$ car l'animateur ne dévoile pas la Ferrari.

Finalement, on trouve $\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{2}{3}$ et le candidat a deux fois plus de chances de gagner en changeant de porte qu'en la gardant.

En y réfléchissant bien, si on décide de changer de porte, on a au départ 2 chances de gagner (les portes où il y a les chèvres) et 1 de perdre, alors que si on décide de ne pas changer de portes, on a au départ 2 chances de perdre et 1 de gagner !

7 **CCINP 105**

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

(c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Solution de 7 : CCINP 105

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit B un événement de probabilité non nulle et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
Alors, $\forall\, i_0 \in I$, $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0}) P_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B)}$.
Preuve : $P_B(A_{i_0}) = \dfrac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_{i_0}) P_{A_{i0}}(B)}{P(B)}$. (1)
Or $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements donc $P(B) = \sum\limits_{i \in I} P(A_i \cap B)$.
Donc $P(B) = \sum\limits_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B)$. (2).
(1) et (2) donnent le résultat souhaité.

2. (a) On tire au hasard un dé parmi les 100 dés.
Notons T l'événement : «le dé choisi est pipé».
Notons A l'événement :« On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
On demande de calculer $P_A(T)$.
Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \dfrac{3}{4}$.
Alors, d'après la formule de Bayes, on a :
$$P_A(T) = \frac{P(T) P_T(A)}{P_T(A) P(T) + P_{\overline{T}}(A) P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On choisit au hasard un dé parmi les 100 dés.
$\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer ».
On pose $A = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.
On nous demande de calculer $p_n = P_A(T)$.
Le système $(T, \overline{T})$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles.
On a d'ailleurs, $P(T) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ et donc $P(\overline{T}) = \frac{3}{4}$.
Alors d'après la formule de Bayes, on a :
$$p_n = P_A(T) = \frac{P(T) P_T(A)}{P_T(A) P(T) + P_{\overline{T}}(A) P\left(\overline{T}\right)}$$
Donc $p_n = \dfrac{\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$.

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^{n-1}}}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$.

Ce qui signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

8 On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».

Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B\cap C$, ni de $B\cup C$.

Solution de 8 :

$\Omega = [\![1,6]\!]^2$, probabilité uniforme.

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(A\cap C) = \frac{1}{4}$,

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(B\cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cap C).$$

$\mathbb{P}(B\cup C) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

$$\mathbb{P}\big(A\cap(B\cup C)\big) = \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B\cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cup C).$$

9 **Indicatrice d'Euler** Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$ où n est un entier non premier supérieur ou égal à 2, muni de la probabilité uniforme. Si $d|n$, on note $A_d = \{kd \mid k\in\Omega \text{ et } kd\in\Omega\}$.

1. Quelle est la probabilité de A_d ?
2. Soit P l'ensemble des diviseurs premiers de n.
   (a) Démontrer que $\left(A_p\right)_{p\in P}$ est une famille d'événements indépendants.
   (b) En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble A des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n (indicatrice d'Euler).

Solution de 9 : Indicatrice d'Euler

1. $\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{|A_d|}{|\Omega|} = \dfrac{\frac{n}{d}}{n} = \dfrac{1}{d}$.
2. (a) Si $p_1,\dots,p_\ell$ sont des diviseurs premiers deux à deux distincts de n, comme ils sont premiers, $\bigcap\limits_{j=1}^{\ell} A_{p_j} = A_{p_1\cdots p_\ell}$.

   $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=1}^{\ell} A_{p_j}\right) = \mathbb{P}(A_{p_1\cdots p_\ell}) = \dfrac{1}{p_1\cdots p_\ell} = \prod\limits_{j=1}^{\ell}\mathbb{P}(A_{p_j})$.

   (b) Les $\overline{A}_p$ sont aussi indépendant, $A = \bigcap\limits_{p\in P}\overline{A}_p$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\varphi(n)}{n} = \prod\limits_{p\in P}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$.

10 Si $A_1,\dots,A_n$ sont mutuellement indépendants, $1\leqslant p\leqslant n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :

- $\bigcap\limits_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap\limits_{i=p+1}^{n} A_i$,
- $\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap\limits_{i=p+1}^{n} A_i$.
- $\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcup\limits_{i=p+1}^{n} A_i$,

Solution de 10 :

- Direct,
- $A_1, \dots, A_p, \overline{A_{p+1}}, \dots, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants, par le premier point, sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i}$ donc sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$.
- idem avec $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_p}, \overline{A_{p+1}}, \dots, \overline{A_n}$.

Dénombrements

11 Combien peut-on construire de nombres comportant 6 chiffres (en base décimale) et ne contenant aucune répétition ? une seule répétition ?

Solution de 11 :

- Sans aucune répétition, cela revient à choisir le premier chiffre non nul et à avoir tous les chiffres différents.
Soit $9 \times A_9^5 = 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136080$ nombre différents.
Vérification avec python :

```
def sans_repetition():
    compteur = 0
    for nombre in range(10 ** 5, 10 ** 6):
        if len(set(str(nombre))) == 6:
            compteur +=1
    return compteur

>>> sans_repetition()
136080
```

- Avec exactement une répétition, il faut faire une disjonction de cas.
  - ⋆ Soit le chiffre répété est 0, ce n'est donc pas le premier, et il faut choisir les places de la répétition et tous les autres chiffres soit $\binom{5}{2} \times A_9^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$ possibilités.
  - ⋆ Soit le chiffre répété n'est pas 0, et il faut choisir ce chiffre : 9 possibilités, puis
    - si le premier chiffre est répété, il faut choisir la place de la répétition, et tous les autres chiffres soit
$$5 \times A_9^4 = 5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$$
possibilités.
    - si le premier chiffre n'est pas répété, il faut choisir les places de la répétition, le premier chiffre et les autres chiffres soit $\binom{5}{2} \times 8 \times A_8^3 = 10 \times 8 \times 8 \times 7 \times 6$ possibilités.

  Soit, dans ce cas, $9 \times (5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 + 10 \times 8 \times 8 \times 7 \times 6) = 378000$ possibilités.

On trouve finalement 408240 tels nombres (soit 3 fois plus).
Vérification avec python :

```
def avec_repetition():
    compteur = 0
    for nombre in range(10 ** 5, 10 ** 6):
        if len(set(str(nombre))) == 5:
```

```
            compteur +=1
    return compteur

>>> avec_repetition()
408240
```

12 Combien y a-t-il de p-cycles dans $\mathfrak{S}_n$?

13 Soit E un ensemble fini à n éléments, A une partie de E à p éléments. Combien peut-on trouver de parties de E ayant exactement un élément de A ?

Solution de 13 :

On choisit l'élément de A : p possibilité, puis une partie de $E \setminus A$: 2^{n-p} possibilités.
Ainsi, il y a $p2^{n-p}$ telles parties.

14 Montrer que dans un ensemble fini non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Solution de 14 :

1re méthode Soit x un élément fixé de l'ensemble. L'application $A \mapsto A \cup \{x\}$ si $x \notin A$ et $A \setminus \{x\}$ si $x \in A$ est bien défini de l'ensemble des parties paires dans l'ensemble des parties impaires ou l'inverse, et ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre.

2e méthode Le cardinal de l'ensemble des parties de cardinal pair est $A = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}$, celui de l'ensemble des parties de cardinal impair est $B = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$.
Ces sommes se calculent classiquement en remarquant que $A + B = 2^n$ et $A - B = 0^n$ en utilisant le binôme.
Si $n \neq 0$, on obtient en particulier $A = B$.

15 **CCINP 112**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Solution de 15 : CCINP 112

1. On note $F = \left\{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \;/\; A \subset B\right\}$.
Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On pose $F_p = \left\{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \;/\; A \subset B \,\text{et}\, \operatorname{card} B = p\right\}$.

   Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\operatorname{card} \mathscr{P}(B) = 2^p$.
De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.

On en déduit que : $\forall\, p \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p} 2^p$.

Or $F = \bigcup\limits_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, \ldots, F_n$ deux à deux disjoints.

Donc $a = \operatorname{card} F = \sum\limits_{p=0}^{n} \operatorname{card} F_p = \sum\limits_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.

Conclusion : $a = 3^n$.

Autre méthode :

Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
Notons encore $F = \left\{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
À tout couple (A, B) de F, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :

$$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 2 & \text{si} & x \notin A \,\text{et}\, x \in B \\ 3 & \text{si} & x \notin B \end{array} \right. \end{array}$$

On note $\mathscr{A}(E, \{1, 2, 3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1, 2, 3\}$.

Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathscr{A}(E, \{1, 2, 3\}) \\ (A, B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.

Le résultat en découle.

2. $\left\{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \varnothing\right\} = \left\{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\}$.

$$\begin{aligned} \text{Or card} \left\{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} &= \operatorname{card} \left\{(A, \overline{B}) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset \overline{B}\right\} \\ &= \operatorname{card} \left\{(A, C) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset C\right\} \\ &= a. \end{aligned}$$

Donc $b = a$.

3. Compter tous les triplets (A, B, C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A \cup B \cup C = E$ revient à compter tous les couples (A, B) tels que $A \cap B = \varnothing$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A \cup B}$.
En d'autres termes, $c = \operatorname{card} \left\{(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \cap B = \varnothing\right\} = b = 3^n$.

16 Partitions d'un entier

1. Déterminer le nombre a_n d'écritures possibles de n comme somme d'au moins un entier naturels non nuls (l'ordre étant important).
2. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre N_n^p d'écritures de n comme somme de p entiers naturels.

On pourra essayer de placer des « | » parmi n « ∘ » et interpréter cela comme des mots sur n alphabet à deux lettres, ou bien trouver une formule de récurrence.

Solution de 16 : Partitions d'un entier

1. On fait une disjonction de cas suivant le premier terme de la somme qui est un entier entre 1 et n : on obtient alors $a_n = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = 2a_{n-1}$ et comme $a_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n-1}$.
2. N_n^p correspond au nombre de façon de placer $p - 1$ « | » (les signes +) parmi n « ∘ » : par exemple, $7 = 1 + 0 + 0 + 1 + 2 + 0 + 2$ correspond à ∘|||∘|∘∘||∘∘.
Il s'agit donc du nombre de mots de $n + p - 1$ lettres sur l'alphabet contenant les deux lettres « | » ou « ∘ » avec exactement $p - 1$ « | ».

Cela se dénombre en plaçant les « | » : $\binom{n+p-1}{p-1}$ possibilités, le reste étant des « ∘ ».
On peut aussi commencer par placer les « ∘ » : $\binom{n+p-1}{n}$ possibilités.
Donc $N_n^p = \binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n}$.

17 Formule du crible

Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| = \sum_{I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

On peut raisonner par récurrence sur n, ou, plus simplement, s'intéresser à $\prod_{i=1}^{n} \left(1 - \mathbb{1}_{A_i}\right)$ sur $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et la développer.

Solution de 17 : Formule du crible

Voir par exemple https://fr.wikiversity.org/wiki/Formule_du_crible/D%C3%A9monstration_de_la_formule_du_crible

Probabilités

18

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n$.

Solution de 18 :

Si une telle probabilité existe, alors $1 = \mathbb{P}(N) = \lambda a_0$ avec $a_0 > 0$ vu les hypothèses donc $\lambda = \dfrac{1}{a_0}$.
Réciproquement, avec un tel lambda, si $A_n = [\![n, +\infty[\![$, alors $\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n+1}) = \lambda(a_n - a_{n+1}) \geqslant 0$ et $\sum \lambda(a_n - a_{n+1})$ télescopique de somme $\lambda(a - 0 - 0) = 1$ d'où l'existence de $\mathbb{P}$ d'après la propriété du cours.

19

Sur l'univers $\mathbb{N}^*$, muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N}^*)$, montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ unique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Calculer $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*)$.

Solution de 19 :

On a bien que les $\dfrac{1}{n(n+1)}$ sont positifs et comment ils valent $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, ils sont sommables de somme (télescopique) $1 - 0 = 1$, d'où l'existence de $\mathbb{P}$.

Puis on calcule $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \ln 2$.

20 Poker

Dans un jeu de 52 cartes classiques, on distribue des mains de 5 cartes. Calculer les probabilités des événements :

- QFR : « Avoir une quinte flush royale » (quinte à l'as et couleur),
- QF : « Avoir une quinte flush non royale » (quinte non royale et couleur),
- A_4 : « Avoir un carré » (les 4 cartes de même valeur),

- F : « Avoir un full » (un brelan et une paire),
- C : « Avoir une couleur qui ne soit pas une quinte » (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas),
- Q : « Avoir une quinte non flush » (5 cartes qui se suivent, pas toutes de la même couleur),
- A_3 : « Avoir un brelan » (exactement 3 cartes de même valeur),
- PP : « Avoir une double paire » (2 paires ne formant pas un carré),
- A_2 : « Avoir une paire » (exactement 2 cartes de même valeur),
- R : « Rien de tout ça ! ».

On devra trouver :

Événement	QFR	QF	A_4	F	C	Q	A_3	PP	A_2	R
Probabilité (%) ≈	0,00015	0,0014	0,024	0,14	0,20	0,40	2,1	4,8	42	50

Solution de 20 : Poker

$\Omega = \mathscr{P}_5(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ ensemble des cartes. $|\Omega| = \binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$, proba uniforme.

- $|QFR| = 4$; $\mathbb{P}(QFR) = \dfrac{1}{649\ 740}$.
- $|QF| = 4 \times 9 = 36$; $\mathbb{P}(QF) = \dfrac{3}{216\ 580}$.
- $|A_4| = 13 \times 48 = 624$; $\mathbb{P}(A_4) = \dfrac{1}{4165}$.
- $|F| = 13 \times \binom{4}{1} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3\ 744$; $\mathbb{P}(F) = \dfrac{6}{4\ 165}$.
- $|C| = 4 \times \binom{13}{5} - 40 = 5\ 108$; $\mathbb{P}(F) = \dfrac{1\ 277}{649\ 740}$.
- $|Q| = 4^5 \times 10 - 40 = 10\ 200$; $\mathbb{P}(Q) = \dfrac{5}{1\ 274}$.
- $|A_3| = 13 \times \binom{4}{1} \times \binom{12}{2} \times 4^2 = 54\ 912$; $\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{88}{4\ 165}$.
- $|PP| = \binom{13}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 44 = 123\ 552$; $\mathbb{P}(PP) = \dfrac{198}{4\ 165}$.
- $|A_2| = 13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1\ 098\ 240$; $\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{352}{833}$.
- $|R| = \left(\binom{13}{5} - 10\right)\left(4^5 - 4\right) = 1\ 302\ 540$; $\mathbb{P}(R) = \dfrac{1\ 277}{2\ 548}$.

21 Distance la plus probable

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. Pour d compris entre 1 et $n-1$, calculer la probabilité que deux amis soient distants de d places (c'est-à-dire séparés par $d-1$ personnes.) Quelle est la distance la plus probable ?

Même question s'ils sont placés sur un cercle.

Solution de 21 : Distance la plus probable

$\Omega = \mathfrak{S}_n$, proba uniforme, $|\Omega| = n!$.

A_d : « la distance est d ».

$|A_d| = 2 \times (n-d) \times (n-2)!$

$\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{2(n-d)}{n(n-1)}$ maximale lorsque $d = 1$ (amis côte à côte).

Autre possibilité : seulement la position des amis, $\Omega = \mathscr{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$, proba uniforme. $|\Omega| = \binom{n}{2}$.

$|A_d| = n - d$ (choix du premier). D'où le résultat.

Sur un cercle : $\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{2n}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n-1}$ ne dépend pas de d, sauf si n est pair et $d = \frac{n}{2}$ auquel cas $\mathbb{P}(A_{n/2}) = \dfrac{1}{n-1}$.

22 Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2,…, N_k de couleur c_k (on a donc $N_1+\cdots+N_k=N$). On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_i boules de couleur c_i pour chaque i (donc $n_1+\cdots+n_k=n$).

Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise et comparer les résultats.

Solution de 22 :

- $p=\dfrac{\binom{N_1}{n_1}\cdots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$.
- $p=\dfrac{n!}{n_1!\cdots n_k!}\dfrac{N_1^{n_1}\cdots {N_k}^{n_k}}{N^n}$ (répartition pour les couleurs = comme les anagrammes).
- $p=\dfrac{n!}{n_1!\cdots n_k!}\dfrac{A_{N_1}^{n_1}\cdots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}$ et on retrouve la première proba.

23 Problème des anniversaires et des coïncidences

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons avec remise. Calculer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité que deux personnes soient nées le même jour (en supposant que personne n'est né le 29 février...) ?
   Application numérique pour $n \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$. À partir de quelle valeur de n cet événement est-il plus probable que son contraire ?

Solution de 23 : Problème des anniversaires et des coïncidences

1. $\Omega = [\![1, M]\!]^n$, $A = \mathscr{A}_n\left([\![1, M]\!]\right)$, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_M^n}{M^n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{M}\right)$
2. $M = 365$, $B = \overline{A}$, $\mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{A_{365}^n}{365^n}$. Pour les applications numériques à la calculatrice, utiliser plutôt la produit ci-dessus.

n	10	20	30	40	50	60	70
$\mathbb{P}(B)(\%)$	11	41	71	89	97	99,4	99,9

   Pour $n = 22$, $\mathbb{P}(B) \approx 47,5\,\%$ et pour $n = 23$, $\mathbb{P}(B) \approx 50,7\,\%$.

24 Problème des rencontres

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i^{e} tirage si la boule tirée porte le numéro i. On note E l'événement « il n'y a aucune rencontre » et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « il y a rencontre au i^{e} tirage ».

1. Définir un espace probabilisé permettant de décrire l'expérience aléatoire.
2. Démontrer, en utilisant librement la formule de Poincaré (crible) que

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Applications :

- *Problème des danseurs de Chicago : n couples se présentent à un concours de danse ; chaque danseur choisit une partenaire au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne danse avec son conjoint ?*
- *Un facteur possède n lettres adressées à n personnes distinctes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune n'arrive à destination ?*
- *Les étudiants de MP 1 décident de se faire des cadeaux pour Noël. Ils mettent tous un papier portant leur nom dans la poubelle de la salle 210 puis tirent successivement un papier chacun portant le nom de personne à qui ils doivent faire un cadeau. Quelle est la probabilité que personne ne doivent se faire soi-même un cadeau ?*
- *Dans un club de Bridge, n messieurs laissent leurs n cannes (toutes distinctes) au vestiaire. En repartant, ils reprennent au hasard une canne. Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne reprenne sa propre canne ?*
- *Quelle est la proportion de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe (on parle de* ***dérangement****) ?*

Solution de 24 : Problème des rencontres

1. $\Omega = \mathfrak{S}_n$.

2. $\overline{E} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right)$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I|=k}} \frac{(n-k)!}{n!} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

25 Deux joueurs s'affrontent au tir à l'arc, le premier qui touche la cible a gagné. Le premier joueur a une probabilité $p_1 > 0$ de toucher la cible, le second une probabilité $p_2 > 0$. On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité que le premier tireur gagne puis celle que le second gagne.
2. En déduire qu'il est presque sûr que le jeu se termine.
3. Retrouver le résultat en utilisant une continuité monotone de la probabilité, en introduisant l'événement A_n : « Le jeu ne s'est pas arrêté au bout de $2n$ parties. »
4. On suppose que $p_2 = \frac{3}{2} p_1$. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

Solution de 25 :

1. Soit G_1 et G_2 de probabilités g_1 et g_2 les événements correspondant à la victoire du 1er et du 2e tireur respectivement.
   Soit G_1^k et G_2^k les événements correspondant à la victoire du 1er et du 2e tireur après k tirs, respectivement.
   Alors $\left(G_1^1, \overline{G_1^1}\right)$ est un système complet d'événements.
   Par la formule des probabilités totales,
   $$g_1 = \mathbb{P}\left(G_1 \cap G_1^1\right) + \mathbb{P}\left(G_1 \cap \overline{G_1^1}\right) = \mathbb{P}\left(G_1^1\right) + \mathbb{P}\left(\overline{G_1^1} \cap \overline{G_2^1}\right) \mathbb{P}\left(G_1 | \overline{G_1^1} \cap \overline{G_2^1}\right) = p_1 + (1-p_1)(1-p_2) g_1.$$
   les tirs des deux joueurs étant indépendants.
   D'où $g_1 = \dfrac{p_1}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$.
2. Même raisonnement pour calculer $g_2 = (1-p_1)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)g_2$ qui donne $g_1 + g_2 = 1$.
3. Probabilité de A_n : $(1-p_1)^n(1-p_2)^n$, suite décroissante.
4. $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{1}{2}$.

Probabilités conditionnelles

26 Un canal de transmission transmet des bits selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec une probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1-p)$ où $0 < p < 1$.

Un bit traverse n canaux de ce type successivement, et l'on suppose que chaque canal fonctionne indépendamment des autres.

On notre x_0 le bit initial. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note x_n le bit après la traversée de n canaux, et p_n la probabilité que $x_n = x_0$.

1. Déterminer une relation entre p_{n-1} et p_n pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n et p.
3. Déterminer la limite de $(p_n)_n$.

Solution de 26 :

Chaîne de Markov

1. Proba totales : $p_n = pp_{n-1} + (1-p)(1-p_{n-1}) = (2p-1)p_{n-1} + 1 - p$.
2. $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$.
3. $\dfrac{1}{2}$.

27 Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches.

On tire deux par deux sans remise toutes les boules de l'urne.
Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Solution de 27 :

On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui soit tel qu'à chaque étape les tirages soient uniformes.

E_i : « au i^{e} tirage, on obtient une boule de chaque couleur ».
On va utiliser la formule des probabilités composées.

$\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{n^2}{\binom{2n}{2}}$ et $\mathbb{P}\left(E_{i+1} \;\middle|\; \bigcap\limits_{j=1}^{i} E_j\right) = \dfrac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}}$.

$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)}{(2n-2i-1)} = \frac{n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Ou alors : on distingue toutes les boules tirées successivement et on s'intéresse seulement aux numéros des boules rouges. $\Omega = \mathscr{P}_n\left(\llbracket 1, 2n \rrbracket\right)$ avec probabilité uniforme. $|\Omega| = \binom{2n}{n}$ et si A est l'événement les couleurs sont alternées, pour chaque couple de tirage successif $(i, i+1)$ on a deux emplacement possible pour la boule rouge donc $|A| = \left|\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \{i, i+1\}\right| = 2^n$.

28 Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que

- 2 % des personnes contrôlées sont en été d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
- 98 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété ;

1. On essaie l'appareil sur une personne et l'on constate que le résultat est positif.
   Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. Même question si le résultat est négatif.
3. Quel est la probabilité que le résultat soit faux ?

Solution de 28 :

1. Bayes $(\mathbb{P}(E \mid T))$: 49,2 %.
2. Bayes $(\mathbb{P}(E \mid \overline{T}))$: 0,1 %.
3. $F = (T \cap \overline{E}) \sqcup (\overline{E} \cap T)$: 2,1 %.

29 Urne de Pólya

Une urne contient initialement $r \geqslant 1$ boules rouges et $b \geqslant 1$ boules blanches.

On effectue des tirages susccessifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.

Pour $n \geqslant 1$, on note R_n (resp. B_n) l'événement « la n^e boule tirée est rouge (resp. blanche) ».

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde boule tirée est rouge ?
2. On note $p_n(r,b)$ le probabilité d'obtenir une boule rouge au n^e tirage quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que
$$\forall\, n \geqslant 2,\quad p_n(r,b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r,b+c)$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de R_n est égale à $\dfrac{r}{r+b}$.
4. Démontrer en utilisant la même méthode que pour $1 \leqslant m < n$,
$$\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.$$
On pourra noter $p_{m,n}(r,b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m^e et n^e tirages, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, et raisonner par récurrence sur m.
5. En déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.

Solution de 29 : Urne de Pólya

Indications :
1. Bayes : $\dfrac{r+c}{r+c+b}$.
2. Proba totales $(R_1, \bar{R}_1)$.
3. Récurrence.
4.
5. $\mathbb{P}(R_m \cap B_n) = \dfrac{br}{(r+b)(r+b+c)}$.

Corrigé : 1. Formule de Bayes : (R_1, B_1) est un système complet d'événements
$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)}$$
(probabilités non nulles vu ce qui suit), chaque tirage se faisant uniformément.

- Au premier tirage, r boules rouges et b boules blanches. $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$.
- Sachant que R_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient $r+c$ boules rouges et b boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{r+c}{r+b+c}$.
- Sachant que B_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient r boules rouges et $b+c$ boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|B_1) = \dfrac{r}{r+b+c}$.

Au final, $\mathbb{P}(R_1|R_2) = \dfrac{\dfrac{r+c}{r+b+c}\cdot\dfrac{r}{r+b}}{\dfrac{r+c}{r+b+c}\cdot\dfrac{r}{r+b} + \dfrac{r}{r+b+c}\cdot\dfrac{b}{r+b}} = \dfrac{r+c}{r+c+b}$.

Donc $\boxed{\mathbb{P}(R_1|R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{r+c}{r+b+c}.}$

---

2. On peut appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (R_1, B_1) :

$$\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1).$$

Or $\mathbb{P}(R_n) = p_n(r,b)$ par définition, $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$.
De plus, l'expérience qui consiste à tirer une boule rouge au n^{e} tirage sachant qu'on avait tiré une boule rouge au premier tirage avec r boules rouges et b boules blanches est exactement la même que celle qui consiste à tirer une boule rouge au $n-1^{\text{e}}$ tirage à partir d'une urne contenant $r+c$ boules rouges et b boules blanches. Ainsi, $\mathbb{P}(R_n|R_1) = p_{n-1}(r+c,b)$. De la même manière, $\mathbb{P}(R_n|B_1) = p_{n-1}(r,b+c)$.

Finalement, $\boxed{p_n(r,b) = \dfrac{r}{r+b}p_{n-1}(r+c,b) + \dfrac{b}{r+b}p_{n-1}(r,b+c).}$

---

3. Par récurrence sur n, $\mathbb{P}(R_1) = p_1(r,b) = \dfrac{r}{r+b}$ et si pour un $n \geqslant 2$, pour tous r et b, $p_{n-1}(r,b) = \dfrac{r}{r+b}$, alors d'après la question précédente,

$$p_n(r,b) = \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b} + \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b} = \frac{r}{r+b}$$

ce qui établit la récurrence. Donc $\boxed{\text{pour tout } n,\ \mathbb{P}(R_n) = \dfrac{r}{r+b}.}$

Remarquable ! Même si le contenu de l'urne change, la probabilité d'obtenir une boule rouge à chaque tirage ne change pas !

---

4. De la même manière, si $n > m \geqslant 2$, on a $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1)$, avec $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = p_{m,n}(r,b)$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1) = p_{m-1,n-1}(r+c,b)$ et $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1) = p_{m-1,n-1}(r,b+c)$. Donc

$$p_{m,n}(r,b) = \frac{r}{r+b}p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{m-1,n-1}(r,b+c).$$

On montre par récurrence sur $m \geqslant 1$ que pour tous r et b et tout $n > m$,

$$\boxed{p_{m,n}(r,b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.}$$

Si $m = 1$, si $n > 1$, $p_{1,n}(r,b) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) = p_n(r+c,b)\dfrac{r}{r+b} = \dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
Si c'est vrai pour $m-1$, et si $n > m$, alors $n-1 > m-1$ et

$$\begin{aligned} p_{m,n}(r,b) &= \frac{r}{r+b}p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{m-1,n-1}(r,b+c) \\ &= \frac{r}{r+b}\cdot\frac{(r+c)(r+2c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} + \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} \\ &= \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} \end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence.
Remarquable ! A nouveau, c'est indépendant de n et m.
Via la formule des probabilités composées, on obtient par la même occasion que $\mathbb{P}(R_n|R_m)$ ne dépendant ni de n, ni de m.

---

5. Comme (R_n, B_n) est un système complet d'événements,

$$\boxed{\mathbb{P}(R_m \cap B_n)} = \mathbb{P}(R_m) - \mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \frac{r}{r+b} - \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} = \boxed{\frac{rb}{(r+b)(r+b+c)}}.$$

Même remarque.

30 Trois joueurs A, B, C s'affrontent à un jeu aléatoire suivant les règles suivantes :

- à chaque partie, deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité,
- le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties de suite.

1. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

Solution de 30 :

1. Soit A_n l'événement « le jeu dure au moins n parties ». $\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) = \dfrac{1}{2}$.
   Avec les probas composées, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^{n-2}}$.
   Par continuité décroissante, A « événement on ne s'arrête pas », $\mathbb{P}(A) = 0$ en passant à la limite.
2. G_A, G_B, G_C les événements des gains de A, B, C.
   B_q « le jeu s'arrête à la q^{e} partie. »
   $B_q = A_q \setminus A_{q+1}$ de probabilité $\dfrac{1}{2^{q-1}}$.
   A_1 « A gagne la première partie ». On a alors un jeu en $A, C, B, A, C, B, \ldots$
   $\mathbb{P}(G_A|A_1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{3k+2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3k+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/8} = \frac{4}{7}$.
   Puis, avec un jeu en $B, C, A, B, C, A, \ldots$
   $\mathbb{P}\left(G_A|\overline{A_1}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{3k+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{3k}} = \frac{1}{8}\frac{1}{1-1/8} = \frac{1}{7}$.
   Donc $\mathbb{P}(G_A) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{5}{14}$.
   Puis $\mathbb{P}(G_B) = \mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_C) = 1 - \mathbb{P}(G_A) - \mathbb{P}(G_B)$.

Indépendance

31 **Oral CCINP – Loi du 0-1 de Borel** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

Posons $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$, $B = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ et $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\mathbb{P}(B)$.
2. Démontrer que les séries $\sum \ln(1 - \mathbb{P}(A_n))$ et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ sont de même nature.
3. En déduire que $\mathbb{P}(B) < 1$ si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.

4. Soit $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Démontrer que $\mathbb{P}(I) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(B) < 1$, et que $\mathbb{P}(I)$ ne peut valoir que 0 ou 1.

32 Soit $s \in]1, +\infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de λ peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note A_m l'événement « m est multiple de n ». Déterminer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $\left(A_p\right)_{p\in\mathscr{P}}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire que $\prod_{p\in\mathscr{P}} \dfrac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s} = \zeta(s)$.