Compacité, connexité par arcs

Exercices vus en cours

1 Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) ℓ est valeur d'adhérence de u.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ est infini.
   (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ n'est pas vide.
2. Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est fermé.

Solution de 1 :

1.
(i)$\Longrightarrow$(ii) Si ℓ est valeur d'adhérence, φ extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \to \ell$, $\varepsilon > 0$, alors apcr $u_{\varphi(n)} \in B(\ell,\varepsilon)$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Soit $\varepsilon > 0$, si $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ est majoré et si $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ ne peut être vide, sinon l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ serait majoré par p et inclus dans $\mathbb{N}$ donc fini.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ n'est pas vide, on construit une suite extraite convergeant vers ℓ : on pose $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(0) \geqslant 0$ et $u_{\varphi(0)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^0}\right)$.
Puis $\varphi(1) \geqslant p = \varphi(0)+1$ tel que $u_{\varphi(1)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^1}\right)$.
Et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geqslant p = \varphi(n-1)+1$ tel que $u_{\varphi(n)} \in B\left(\ell, \frac{1}{2^n}\right)$.
Alors φ est strictement croissante et, par construction, $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

2. Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérences de u. Montrons que ${}^cA$ est ouverte.
Si $x \in {}^cA$, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\{n, u_n \in B(x,\varepsilon)\}$ est fini et donc aucun des élément de $B(x,\varepsilon)$ ne peut être valeur d'adhérence non plus, c'est-à-dire que $B(x,\varepsilon) \subset {}^cA$, ce qui signifie bien que ${}^cA$ est ouverte et que A est fermée.

2 Dans $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |p_k|$, montrer que la sphère unité est fermée bornée mais n'est pas compacte.

Solution de 2 :

$X^n \in S(0,1)$ (qui est fermée et bornée).
Si (X^n) a une valeur d'adhérence, on a $P \in \mathbb{K}[X]$ et φ extractrice telle que $\left\|X^{\varphi(n)} - P\right\| \to 0$. Alors chaque cœfficient de $X^{\varphi(n)}$ tend vers le cœfficient correspondant de P, donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Mais alors $1 = \left\|X^{\varphi(n)}\right\| \to 0$ ce qui est contradictoire.

3 Montrer que $\mathscr{O}(n) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), M^\top M = I_n\}$ est compact.

Solution de 3 :

Fermée comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue $M \mapsto MM^\top$, le produit matriciel étant bilinéaire et la transposition linéaire.
Bornée soit parce que $\|M\|_2^2 = \mathrm{tr}(MM^\top) = n$ soit comme les colonnes de M sont orthonormées, tous les cœfficients vérifient $|m_{i,j}| \leqslant 1$ donc $\|M\|_\infty \leqslant 1$.

4 Montrer que la boule unité fermée de $\mathscr{C}^{\infty}([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ n'est pas compacte.

Solution de 4 :

$f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ est continue, de norme 1 et converge simplement vers $\delta_{\cdot,1}$. Si on pouvait en extraire une suite uniformément convergente, la limite devrait être continue.

Compacité

5 **Écrits Mines** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{AQ, Q \in \mathscr{O}(n)\}$ est compact.

Solution de 5 : Écrits Mines

C'est image du compact $\mathscr{O}(n)$ par l'application continue $Q \mapsto AQ$ car linéaire en dimension finie.

6 **Écrits Mines – Propriété de Borel-Lebesgue**

Montrer que si K est compact, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut « recouvrir » K par des boules ouvertes de rayon ε, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de K telle que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Solution de 6 : Écrits Mines – Propriété de Borel-Lebesgue

Sinon, supposons $K \neq \varnothing$. On a $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x_0, \dots, x_n$, $K \not\subset \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

Donnons-nous $x_0 \in K$. puis $x_1 \in K$ tel que $x_1 \notin B(x_0, \varepsilon)$. Puis $x_2 \notin \bigcup_{i=0}^{1} B(x_i, \varepsilon)$.

Et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{K}$ tel que $x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$.

On a alors, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \neq m$, $\|x_n - x_m\| \geqslant \varepsilon$.

Or on peut extraire de (x_n) une suite convergente, ce qui est contradictoire.

7 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n$ des points de E, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

On appelle **enveloppe convexe** de A l'ensemble des barycentres de ses points à cœfficients positifs. Notons-la $\mathrm{Conv}(A)$.

1. Montrer que $K = \left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.

Solution de 7 :

1. Fermé (image réciproque continue d'une fermé) et borné est dimension finie.
2. Image continue de K.

8 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall\, (x, y) \in K,\quad x \neq y \Rightarrow \left\| f(x) - f(y) \right\| < \left\| x - y \right\|.$$

1. (a) Montrer que f admet au plus un point fixe dans K.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe dans K, que l'on notera a.
   On pourra étudier sur K la fonction $\varphi : x \mapsto \left\| f(x) - x \right\|$.

2. Soit $(x_n)_n$ une suite définie par $x_0 \in K$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Démontrer que $(x_n)_n$ converge vers a.
   On s'intéressera à $\|x_n - a\|$ et on séparera deux cas suivant s'il existe n tel que $x_n = a$ ou non.

Solution de 8 :

1. (a) Si $a \neq b$ conviennent, $\|a-b\| < \|a-b\|$.
   (b) Soit $\varphi : x \mapsto \left\|f(x)-x\right\|$. Elle est continue par opération (f l'est car lipschitzienne) sur un compact donc elle atteint un minimum en $a \in K$.
   Si $f(a) \neq a$, alors $\left\|f(f(a)) - f(a)\right\| = \varphi(f(a)) < \left\|f(a)-a\right\| = \varphi(a)$ ce qui est contradictoire.
   Donc m est un point fixe de f, le seul.
2. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$.
   S'il existe p tel que $x_p = a$, alors, par récurrence, a étant point fixe de f, pour tout $n \geqslant p$, $x_n = a$ donc $x_n \to a$.
   Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et $\|x_{n+1} - a\| = \left\|f(x_n) - f(a)\right\| < \|x_n - a\|$. Donc $(\|x_n - a\|)_n$ est positive et (strictement) décroissante, donc convergente vers $\ell \in \mathbb{R}^+$.
   Mais $x \in K^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $b \in K$.
   Et $x_{\varphi(n)+1} = f\big(\varphi(n)\big) \to f(b)$ par continuité.
   Puis $\left\|x_{\varphi(n)} - a\right\| \to \|b-a\| = \ell$ et $\left\|x_{\varphi(n)+1} - a\right\| \to \left\|f(b)-a\right\| = \ell$.
   Si $a \neq b$, alors $\ell = \left\|f(b)-a\right\| = \left\|f(b)-f(a)\right\| < \|b-a\| = \ell$ ce qui est contradictoire.
   Donc $a = b$ et $\|x_n - a\| \to \ell = \|b-a\| = 0$ donc $x_n \to a$.

9 Diamètre d'une partie bornée

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E.

1. Justifier l'existence de $D = \sup\left\{\left\|x-y\right\|,\ (x,y) \in A^2\right\}$. On dit que D est le diamètre de A.
2. Démontrer que si A est compacte, alors il existe $(a,b) \in A^2$ tel que $D = \|a-b\|$.
3. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le diamètre de la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Solution de 9 : Diamètre d'une partie bornée

1. Partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ car A est borné.
2. $(x,y) \mapsto \left\|x-y\right\|$ est un fonction continue (car lipschitzienne, en prenant la norme produit sur A^2) sur le compact A^2 donc atteint un minimum.
3. $2r$: par IT, $\left\|x-y\right\| \leqslant 2r$ et il est facile de voir que cette borne est atteinte.

10

Soit (u_n) une suite convergente dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$, ℓ sa limite.

Montrer que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Solution de 10 :

Soit $K = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. On montre que K est une partie fermée et bornée de E.

La suite étant convergente, elle est bornée donc K l'est.

Si $x \notin K$, $u_n \not\to x$ donc on a $\varepsilon > 0$ tel que à partir d'un certain rang N, $u_n \notin B(x,\varepsilon)$, et alors, nécessairement, $\ell \notin B(x,\varepsilon)$.

Puis, comme $x \notin K$, en prenant ε' strictement inférieur à ε et au minimum des $\|x-u_n\|$ pour $n \in [\![0, N-1]\!]$, on aura $K \cap B(x,\varepsilon') = \varnothing$ donc ${}^cK$ est ouvert et K est fermé.

11 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$.

Montrer que f atteint sur E un minimum global.

Solution de 11 :

On a $A \in \mathbb{R}$ tel que si $\|x\| \geqslant A$, $f(x) \geqslant f(0_E) + 1$.
Puis f atteint un minimum sur le compact $\overline{B}(0_E, A)$ qui est en fait global.

12 Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, F_n le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus n, $f \in E$.

Montrer que la distance de f à F_n est atteinte : on a une fonction polynomiale $\phi_n \in F_n$ telle que

$$\left\|f - \phi_n\right\|_\infty = \mathrm{d}(f, F_n) = \inf_{\phi \in F_n} \left\|f - \phi\right\|_\infty$$

Solution de 12 :

$\left\|f\right\|_\infty \in \left\{\left\|f-\phi\right\|_\infty, \phi \in F_n\right\}$. Donc $\mathrm{d}(f, F_n) \leqslant \left\|f\right\|_\infty$.
On s'intéresse donc aux $\phi \in F_n$ telle que $\mathrm{d}(f, \phi) \leqslant \left\|f\right\|_\infty$.
Or l'intersection de boule fermée de centre f et de rayon $\left\|f\right\|_\infty$ et de F_n est un fermé borné dans F_n qui est de dimension fini, donc est compact.
L'application continue car lipschitzienne $\phi \mapsto \mathrm{d}(f, \phi)$ atteint un minimum sur $F_n \cap \overline{B}\left(f, \left\|f\right\|_\infty\right)$ qui est en fait global.

13 Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\|$ et A une partie non vide de E. On rappelle la définition de la distance d'un élément x_0 de E à une partie A de E, notée $\mathrm{d}(x_0, A)$, par la formule $\mathrm{d}(x_0, A) = \inf\limits_{x \in A} \|x - x0\|$.

1. Supposons A compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$, il existe $y \in A$ tel que $\mathrm{d}(x_0, A) = \left\|y - x_0\right\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que A est fermé.
3. Montrer que l'application qui à x_0 associe $d(x_0, A)$ est continue sur E (sans aucune hypothèse sur A).
4. En déduire que si A est un fermé de E et B un compact de E tels que A et B sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\forall\, (a, b) \in A \times B,\ \ \|a - b\| \geqslant \delta$.
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que A et B sont deux fermés disjoints.

Solution de 13 :

Normes subordonnées

14 **Normes subordonnées**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note $S = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\right\}$ et $B = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| \leqslant 1\right\}$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et f l'application de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad f(X) = AX.$$

(a) Justifier que f est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(b) Démontrer que les ensembles $E_1 = \{\|AX\|,\ X \in S\}$, $E_2 = \{\|AX\|,\ X \in B\}$ et $E_3 = \left\{\dfrac{\|AX\|}{\|X\|},\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ admettent une borne supérieure.

(c) Démontrer que les trois sup sont égaux.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $N(A)$ ce sup commun.

2. Démontrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.
   On dit que N est la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on note N sa norme subordonnée.
   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on note N sa norme subordonnée.
   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.

Solution de 14 : Normes subordonnées

1. (a) f est linéaire en dimension finie.

   (b) E_1 et E_2 sont des images par des fonctions continues des compacts (fermés bornés en dimension finie) S et B, donc admettent et atteignent ds extremums : les bornes sup sont même des max.
   $E_3 = E_1$ car $\dfrac{X}{\|X\|}$ est de norme 1.

   (c) Vu la remarque précédente, on a déjà $\max E_3 = \max E_1$.
   Puis $S \subset B$ donc $\max E_1 \leqslant \max E_2$.
   Soit $X_0 \in B$ tel que $\|AX_0\| = \max E_2$. Alors on peut choisir $X_0 \neq 0$ (sinon, plus de problème, tout est nul !) et $\dfrac{X_0}{\|X_0\|} \in S$.
   Donc $\max E_2 = \|X_0\| \left\| A \dfrac{X_0}{\|X_0\|} \right\| \leqslant 1 \times \max E_1$.
2. On a déjà $N(A) \geqslant 0$.
   Si $N(A) = 0$, alors vu E_3, pour tout $X \neq 0$, $AX = 0$ donc $\operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = 0_n$.
   Si $X \in S$, $\|\lambda AX\| = |\lambda|\,\|AX\|$ puis on passe au max avec $|\lambda| \geqslant 0$.
   Puis si $X \in S$, $\|(A+B)X\| \leqslant \|AX\| + \|AX\|$ puis on passe aux max.
3. Si $X \in S$ tel que $BX \neq 0$, $\|(AB)X\| = \dfrac{\|A(BX)\|}{\|BX\|}\|BX\| \leqslant N(A)N(B)$, sinon on a quand même $\|(AB)X\| \leqslant N(A)N(B)$, puis on passe au max.
4. Si $X \in S$, $\|AX\|_\infty = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j|\right) = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.
5. Si $X \in S$, $\|AX\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}x_j| = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)|x_j| \leqslant \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\|X\|_1$, majorant atteint en prenant le vecteur de la base canonique correspondant au j pour lequel ce max est atteint.

Connexité par arcs

15 Démontrer qu'un cercle et qu'un segment ne peuvent pas être homéomorphes : il n'existe pas de bijection f entre les deux telle que f et f^{-1} soient continues.

Solution de 15 :
Il suffit d'enlever un point qui n'est pas une borne du segment et on a une fonction continue dont l'image d'un connexe par arc ne l'est plus.

16 Étudier la connexité par arcs de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

Solution de 16 :

- $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car $\det \mathscr{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ non connexe par arcs alors que det est continue.
- $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs : on montre que chaque matrice inversible peut être jointe continûment à I_n.
  Pour cela, on trigonalise (on peut), $M = PTP^{-1}$. On note d_i les cœfficients diagonaux de T.
  Par connexité par arcs de $\mathbb{C}^*$, pour chaque $d_i (\neq 0)$, on a un chemin continu $\phi_i : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ tel que $\phi_i(1) = d_i$ et $\phi_i(0) = 1$.
  On pose alors $A(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & & (t \cdot t_{i,j}) \\ & \ddots & \\ 0 & & \phi_n(t) \end{pmatrix}$.
  $\Phi : t \mapsto PA(t)P^{-1}$ continue par opérations, à valeurs inversibles, $\Phi(0) = I_n$ et $\Phi(1) = M$.
- $\mathscr{O}(n)$ n'est pas connexe par arcs car $\det \mathscr{O}(n) = \{\pm 1\}$ non connexe par arcs alors que det est continue.

17 Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Solution de 17 :
L'ensemble des matrices diagonalisable est étoilé par rapport à la matrice diagonalisable 0_n.

18 **Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe**

En utilisant une fonction indicatrice, montrer que si A partie d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs, les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées relativement à A sont $\varnothing$ et A.

Lorsque c'est le cas, on parle d'ensemble **connexe**.

Solution de 18 : Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe
On montre que $\mathbb{1}_B$ est continue en passant par la définition : si $a \in B$, qui est ouvert, on a un voisinage de a qui reste dans B et qui assure que $\mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_B(a) = 0$; si $a \in {}^cB$, qui est ouvert, on a un voisinage de a qui reste dans ${}^cB$ et qui assure que $\mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_B(a) = 0$.

Mais alors, comme A est connexe par arcs, $\mathbb{1}_B(A)$ l'est donc $\mathbb{1}_B$ est constante et donc $B = \varnothing$ ou $\mathbb{1}_B = A$.

19 **Théorème de Darboux**

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to R$ une application dérivable. Notons $A = \{(x,y) \in I \times I, x < y\}$.

1. Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle, autrement dit, f' a la propriété des valeurs intermédiaire.

Solution de 19 : Théorème de Darboux