DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N°6

Vous avez le choix entre deux sujets :

- **Compilation de CCINP** : Très classique, trois exercices et un problème. Rassurant, mais mettant en œuvre la plupart des outils vus sur les séries de fonctions et sur les intégrales à paramètres.
- **Mines-Ponts Maths 2 MP 2016** : sujet nettement plus difficile, avec certaines questions difficiles ou bloquantes. À ne choisir que si vous êtes confiant sur les derniers chapitres.

Nous sommes à trois mois des écrits. Soyez dans les starting blocks. On se concentre, on baisse la tête, et on fonce (mais on ne confond pas vitesse et précipitation).

Je vous fait confiance, vous êtes capable du meilleur !

Extraits du rapport de l'un des sujets :

« Un grand nombre de copies nous ont paru ne pas répondre au minimum requis pour cette épreuve : orthographe et syntaxe déficientes, abus des abréviations, écriture difficilement lisible, questions non numérotées, sans parler des questions dont la rédaction est abandonnée en cours de route et des nombreuses ratures.

Elles donnent un sentiment de désinvolture, voire de démission, de la part de leurs auteurs. Nous avons également constaté trop fréquemment une connaissance insuffisante du cours, l'incapacité de le mettre en pratique dans des situations simples, et le recours à des raisonnements manifestement faux pour aboutir au résultat voulu, ce qui manifeste clairement la malhonnêteté intellectuelle de leurs auteurs.

Autant dire qu'un étudiant sérieux et travailleur, qui apprend son cours et s'entraîne aux méthodes et exercices classiques de celui-ci, a déjà de sérieux atouts.

S'il prend le temps de réfléchir sur le sens des problèmes et d'en chercher le fil du raisonnement, s"il s'efforce de recourir aux outils dont il dispose pour attaquer des questions à première vue insolubles, il a de grandes chances d'obtenir une note qui le propulse vers les niveaux de l'admissibilité.

Plus encore, par cette attitude orthogonale à un bachotage stérile, il se il se prépare ainsi au mieux à son futur métier d'ingénieur ou de chercheur par la recherche de solutions à des problèmes nouveaux qui ne manqueront pas de se poser à lui, tant il est vrai que la science et la technologie ne progressent qu'en sortant des sentiers battus. »

Comme d'habitude, les corrigés seront disponibles en ligne à la fin du devoir.

---

* * * Début du sujet CCINP * * *

Calculatrices non autorisées.

Exercice 1 (CCINP MP 2015) : Interversion série-intégrale

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$?
2. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?
3. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x\right)$.

Exercice 2 (CCINP MP 2012) : Continuité d'une fonction définie par intégrale

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et g une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ soit intégrable sur J.
   On pose, pour tout $x \in I$, $f(x) = \displaystyle\int_J g(x,t)\ dt$.
   Donner toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une fonction définie par intégrale dépendant d'un paramètre permettant de conclure que la fonction f est continue sur I.
2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\ dt$.
   Démontrer que la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\ dt$.
   Calculer $f_2(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.
   La fonction f_2 est-elle continue sur $[0,+\infty[$?
   Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse de domination ?

Exercice 3 (CCINP MP 2017) : Familles sommables

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Problème (CCINP PSI 2017) : Phénomène de Gibbs

Présentation générale

L'objet de ce problème est l'étude du phénomène de Gibbs. Dans la première partie, on démontre des lemmes de Riemann-Lebesgue. Dans la deuxième, on calcule l'intégrale de Dirichlet. Enfin, dans la troisième partie, on met en évidence le phéomène de Gibbs.

Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et $\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Partie 1 : résultats préliminaires

Dans ce qui suit, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ désigne une fonction continue 2π-périodique telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(t)\mathrm{d}t = 0$.

1. Si $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^1, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 0$.
2. Montrer que la primitive de φ s'annulant en 0 est 2π-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, déduire de ce qui précède que pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\mathrm{d}t = 0$.

3. Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soient $\varepsilon > 0$ et $g \in C^1([\alpha, \beta])$ telle que $\sup_{[\alpha,\beta]} |h - g| \leqslant \varepsilon$.

   Montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de φ telle que $\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant M|\beta-\alpha|\varepsilon + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\mathrm{d}t\right|$.

   En déduire que pour tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)\mathrm{d}t = 0$.

   On pourra utiliser le théorème de Weierstrass.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.

   Déduire de ce qui précède que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin^2(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ soit bornée.

5. Montrer que pour tout $a > 0$, les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ puis $\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ sont convergentes et que $\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\mathrm{d}t - \frac{F(a)}{a}$.

6. Montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ sont convergentes et que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

   Dans ce qui suit, on considère une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ soit absolument convergente.

7. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

8. On suppose de plus que la fonction f est bornée. Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathscr{L}(f)(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

9. Soit $f : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.
   (a) Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f)$ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ $\quad (E)$
   (b) On cherche une solution particulière de (E) de la forme $x \mapsto \alpha(x)\cos(x) + \beta(x)\sin(x)$ où les fonctions α et β sont de classe C^2 et vérfient $\forall x \in]0, +\infty[,\ \alpha'(x)\cos(x) + \beta'(x)\sin(x) = 0$.
   Montrer que l'on peut prendre $\alpha(x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t$ et $\beta(x) = \int_x^{+\infty} f_2(t)\mathrm{d}t$ où f_1, f_2 sont des fonctions que l'on déterminera.
   (c) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
   (d) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x > 0,\ \mathscr{L}(f)(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$.

10. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que pour tout $x > 0$ on a $\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t$.

11. Montrer que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t}\right)\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+.

    En déduire que $\lim_{x\to0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

12. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Partie 3 : phénomène de Gibbs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,\pi[\\ 0 & \text{si } x \in \{0,\pi\} \end{cases} \qquad (E.1)$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$.

13. En calculant la dérivée de S_n, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,\pi],\ S_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\pi}{4} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

    En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

15. En déduire que $S_n(\pi/2)$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.

16. Calculer $S_n(\pi - x)$ en fonction de $S_n(x)$.

    En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout $x \in]0,\pi/2]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$.

17. Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie par $(E.1)$ sur $\mathbb{R}$.

18. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ définie sur $[0,\pi]$ par $\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n}\dfrac{\sin(x)}{\sin\left(\dfrac{x}{2n}\right)} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ converge simplement sur $[0,\pi]$ vers la fonction φ définie sur $[0,\pi]$ par $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in]0,\pi] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

19. Montrer que φ est continue sur $[0,\pi/2]$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ puis que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

20. En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

21. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

    puis que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

22. Comparer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$.

    On donne $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} > 0{,}58$.

    En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0,\pi/2[$.

∗ ∗ ∗ Fin du sujet CCINP ∗ ∗ ∗

L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Théorème taubérien de Hardy–Littlewood-Karamata

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

A Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\,du \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du.$$

1. Montrer que la fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

4. En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.

5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

B Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$.

7. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

8. Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}}du$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

9. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

10. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{k}}}\Big)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

11. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim_{x\to 0} x\, f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

12. Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

13. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Card}(A(n))\, \mathrm{e}^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n))\, \mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

14. Montrer que si $x > 0$, $\frac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor \mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.
En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que $A_2 \in S$, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

15. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$
Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

D Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x \to 0} \Big(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \Big) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\| \, \|_\infty$définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \psi(\mathrm{e}^{-nx}).$$

16. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que, pour tous ψ_1, ψ_2 dans E, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x \to 0} x\,(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose
$$\Delta(\psi) = \lim_{x \to 0} x\,(L(\psi))(x).$$

17. Vérifier que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \, \|_\infty)$.

18. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0, 1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tous $a, b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

19. Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{\mathrm{e}}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{\mathrm{e}}, 1]. \end{cases}$$

20. Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que $n = p^2 + q^2$.

21. Si $A \in S$, que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \mathrm{Card}(A(n))$? Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} v(k)$.

Fin du problème