Concours blanc

Calculatrices Non Autorisées

Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Les rendre sur des copies séparées. Respecter l'ordre des questions de chaque exercice.

Exercice 1 : Séries

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

- $a_1 \geqslant 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$,
- la suite (a_n) est bornée,
- la série $\sum(a_n)$ diverge.

On note alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\forall n \geqslant 2,\ b_n = \dfrac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{A_k}$.

1. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln(n+1) - \ln(n)$, puis en déduire que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. (a) De façon analogue, montrer que $T_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

(b) En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geqslant 2)$.

(c) Retrouver ces deux résultats par une autre méthode.

3. Étude de deux exemples

(a) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

(b) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n}$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P). En utilisant la série $\sum(w_n)_{n\geqslant 2}$, déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

4. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

(a) Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

(b) Prouver que $\dfrac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$.

(c) Déterminer alors la nature de la série $\sum(a_n/A_n)_{n\geqslant 2}$.

(d) Déterminer enfin la limite de b_n en $+\infty$.

5. Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que $v_n = o(u_n)$ et $\sum(v_n)$ diverge.

Exercice 2 : Intégrales impropres

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f. Puis dans la partie II (qui est indépendante de la première), on calcule $f(1)$.

Partie I : Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Étude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*
   Donner les valeurs du réel α pour lesquelles l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.
2. *Étude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*
   (a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.
   (b) Vérifier que la fonction $t \longmapsto |\sin(t)|$ est π-périodique, et en déduire, pour tout entier k, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.
   (c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 2$
   $$\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}.$$
   (d) Préciser les valeurs du réel α pour lesquelles l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.
3. *Étude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*
   (a) Étudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.
   (b) Déterminer une relation, pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geqslant \pi$, entre $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$.
   (c) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
4. *Domaine de définition de la fonction f*
   Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.
   En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.

TSVP ☞

Partie II : Calcul de l'intégrale $f(1)$

5. *Calcul d'intégrales auxiliaires*

   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \sin(2nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t$

   (a) Vérifier que u_n et v_n existent pour toute valeur de l'entier naturel n.

   (b) En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que u_n est indépendante de n et donner sa valeur.

6. *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$*

   On considère une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

   À tout entier naturel m, on associe l'intégrale $G_m = \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{e}^{imt}\,\mathrm{d}t$.

   Démontrer, en utilisant une intégration par parties, que $G_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$.

7. *Conclusion*

   (a) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{\cos t}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   (b) Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $v_n - u_n$.

   (c) En déduire la valeur de $f(1)$.

Exercice 3 : Algèbre

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la question 1, où il est égal à 2.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.

On note ϕ_A l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A. Les questions 1 et 2 étudient la diagonalisabilité de ϕ_A, la question 3 en étudie des vecteurs propres.

Les trois questions sont indépendantes.

1. **Étude du cas** $n = 2$

   Dans toute cette question, on prendra $n = 2$.

   (a) Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\operatorname{Ker}\phi_A$.

   Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Donner la matrice de ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Dans la suite de cette partie, on suppose que $\phi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

   (c) Donner le polynôme caractéristique de ϕ_A sous forme factorisée.

   (d) En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

   (e) Démontrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

2. **Étude du cas général**

   On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   On note $(P_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i, j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

   (a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM-$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).

      i. Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.

      ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de $A^\top$.

      iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et $A^\top Y = \overline{z}Y$.

      En calculant $\phi_A(XY^\top)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.

   (b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

   On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

   (c) Démontrer que, pour tout couple (i, j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

   (d) En déduire que A est diagonalisable.

3. **Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre** 0

   Soit m le degré du polynôme minimal de A.

   (a) Démontrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

   (b) Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\operatorname{Ker}\phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \operatorname{Ker}\phi_A$.

   On suppose désormais que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ($1 \leqslant p \leqslant n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

   (c) Soient $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \operatorname{Ker}\phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

   (d) En déduire que $B \in \operatorname{Ker}\phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

   (e) Préciser la dimension de $\operatorname{Ker}\phi_A$.