DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N°4

Vous avez le choix entre deux sujets :

- CCINP Maths 1 MP 2018 : sujet plutôt classique dont les parties sont largement indépendantes, quelques questions informatiques qui ne sont pas difficiles.
- Mines-Ponts Maths 1 MP 2017 : sujet plus technique, calibré pour 3 heures, et j'ai enlevé quelques questions qu'on ne peut pas encore traiter. L'heure restante pourra être consacrée à l'étude des questions Q1 à Q9 du problème CCINP.

Nous sommes à mi-parcours par rapport aux écrits. Placez-vous dans des conditions de concours : vous y êtes, vous donnez tout.

Je vous fait confiance, vous êtes capable du meilleur !

💪

Extraits d'un rapport de jury CCINP : « *Voici quelques conseils pour les futurs candidats :*

1. *Éviter d'essayer d'escroquer les correcteurs en trafiquant les calculs ; ceci indispose fortement le correcteur.*
2. *Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.*
3. *Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.*
4. *Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figures quelques lignes plus haut ou à la question précédente.*
5. *Numéroter les copies et les rendre dans l'ordre.*
6. *Commencer l'épreuve par une lecture diagonale du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.*
7. *C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.*
8. *Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.*
9. *Soigner la présentation.*
10. *Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultats qui doit être prouvé.* »

Comme d'habitude, les corrigés seront disponible en ligne à la fin du devoir.

Sujet CCINP : Mathématiques 1 – MP – 2018

Les calculatrices sont interdites

ESTIMATIONS NUMERIQUES D'INTEGRALES

Objectifs

Le fil conducteur de ce sujet est le calcul approché d'intégrales.

La partie 1 est indépendante des autres parties. A travers l'exemple de l'intégrale de Gauss, on utilise des suites de fonctions et on « permute limite et intégrale ».

Les parties 2 et 3 peuvent être traitées de manière indépendante. La partie 4 utilise des résultats des parties 2 et 3.

Les parties 2,3 et 4 traitent de l'utilisation de polynômes interpolateurs pour le calcul approché d'intégrales : on présente le principe des méthodes de quadrature, dite de Newton-Cotes, ainsi qu'un raffinement avec la méthode de quadrature de Gauss.

Le sujet comporte aussi quelques questions notées *Informatique* portant sur le programme « informatique pour tous ». Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python.

Notations

- Si f est une fonction réelle bornée sur $[a,b]$ avec $a<b$, on pose
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
- On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

1. « Permutation limite-intégrale » et intégrales de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss
$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

A. Utilisation d'une série

Q.1. (a) On pose, pour $t\in[-1,1]$, $e_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
Justifier, en utilisant une formule de Taylor, que e_n converge simplement vers une fonction à préciser sur $[-1,1]$.

(b) Montrer que la convergence est en fait uniforme.

(c) Justifier que $\varphi_n : x \mapsto e_n\left(-x^2\right)$ converge uniformément vers $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $[0,1]$.

(d) En déduire que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$

Q.2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on
$$|I - s_n| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}$$

Q.3. *Informatique* : écrire une fonction récursive `factorielle` qui prend en argument un entier n et renvoie l'entier $n!$.

Q.4. *Informatique* : en déduire un script qui détermine un entier N tel que $|I - s_N| \leq 10^{-6}$.

B. Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $[0,+\infty[$ la fonction f_n par :
$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

Q.5. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q.6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x\in[0,1],\ |f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x^2}$.
Pour les $3/2$, on admet qu'à cette condition, on peut échanger limite et intégrale sur $[0,1]$. Pour les $5/2$, le justifier.
En déduire que
$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}$$

2. Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts.
On appelle polynome interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

A. Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme ℓ_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\ell_i(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X-x_k}{x_i-x_k}$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(X)$$

Q.7. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

B. Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q.8. *Informatique* : si $y_0,\dots,y_n$ sont des réels, le polynôme $P=\sum_{i=0}^{n} y_i\ell_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i)=y_i$ pour tout i. Ecrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i, y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a.
Par exemple, si `x = [-1, 0, 1]` et `y = [4, 0, 4]`, on montre que $P=4X^2$ et donc $P(3)=36$.
Ainsi `lagrange(x, y, 3)` renverra 36.

Q.9. *Informatique* : chercher le polynôme interpolateur $P=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $a_0,\dots,a_n$:

$$\begin{cases} P(x_0)=f(x_0)\\ \qquad\vdots\\ P(x_n)=f(x_n)\end{cases} \iff V\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f(x_0)\\ \vdots\\ f(x_n)\end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n+1$.
Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n, lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

C. Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.
On note $\sigma=\{x_0,\dots,x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n}(X-x_i)$$

On veut démontrer pour tout réel $x\in[a,b]$, la propriété suivante notée $\mathscr{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a,b[,\ f(x)-L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}\pi_\sigma(x)$$

Q.10. Résultat préliminaire : soit $p\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi\ :\ [a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c)=0$.

Q.11. Justifier que pour tout $x\in\sigma$, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a,b]$ une application F par

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda\pi_\sigma(t)$$

Q.12. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x)=0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q.13. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathscr{P}_x$ est vraie.

Q.14. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Q.15. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,2\pi]$

Q.16. On définit f sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'un développement limité que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|f^{(2k)}\|_\infty \geq (2k)!$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

3. Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ défini par : pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

On applique le procédé d'orthonomalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $\left(1, X, X^2, \dots\right)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Vect}\left(1, X, \dots, X^k\right) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k)$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

Q.17. Calculer P_0 et P_1.

Rappel : P_0 doit être colinéaire à 1 et normé et pour calculer P_1, on trouve λ tel que $X - \lambda$ est orthogonal à 1 *puis on normalise.*

On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme P_k est de degré k (conséquence du procédé d'orthonormalisation).

Q.18. Justifier que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On prend $n \geq 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1,1]$.

Q.19. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\,dt = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1,1]$.

On suppose par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racine simples. Si P_n admet des racines $t_1, \dots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1)\dots(X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

Q.20. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t)\,dt = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1,1]$).

4. Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynôme interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pour $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$. A cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\int_a^b L_N(f)(x)\,dx$ n'est donc pas forcément pertinent...

Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

Q.21. Justifier que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \ \text{ avec }\ g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right)$$

On est donc ramenés à estimer $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ où $g\,:\,[-1,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.
On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ dans $[-1,1]$, deux à deux distincts.
On rappelle que $L_n(g)=\sum_{i=0}^{n} g(t_i)\ell_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose

$$J(g)=\int_{-1}^{1} L_n(g)(t)\,dt=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i)\ \text{ avec }\ \alpha_i=\int_{-1}^{1}\ell_i(t)\,dt$$

Lorsqu'on approxime $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt\approx\sum_{i=0}^{n}\alpha_i g(t_i)$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0,\ldots,t_n$ et aux poids $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$.

Q.22. Justifier que pour tout polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P)=\int_{-1}^{1} P(t)\,dt$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de dégré inférieur ou égal à n.

Q.23. Exemple : on prend $n=1$, $t_0=-1$ et $t_1=1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la « méthode des trapèzes ».

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \ldots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie 3.
Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n+1$.
Soit $P\in\mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P=QP_{n+1}+R$$

Q.24. Démontrer que $J(QP_{n+1})=\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,dt$, puis conclure que $J(P)=\int_{-1}^{1} P(t)\,dt$.

Q.25. Démontrer que les poids $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.

Mines-Ponts – Mathématiques 1 – MP – 2017

Etude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit I un intervalle de la forme $[-a,a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathscr{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ ;
- $\mathscr{P}$ la partie de $\mathscr{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note

$$W_n=\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^n\,dt$$

et si $f\in\mathscr{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules

$$\forall x\in I,\ u(f)(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x\sin(t))\,dt$$

$$\forall x\in I,\ v(f)(x)=f(0)+x\int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t))\,dt$$

Les candidats devront justifier leurs affirmations.

A. Préliminaires

1. Justifier que $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$.
2. Montrer que si $f \in \mathscr{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies.
   On admet qu'elles appartiennent à $\mathscr{E}$.
   Justifier que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathscr{E}$.
3. Montrer que $\mathscr{P}$ est stable par u et v.
4. Etablir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$
5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B. Etude de la continuité de u et v

On considère la norme M de $\mathscr{E}$ définie pour tout $f \in \mathscr{E}$ par la formule
$$M(f) = \max_{x\in I} |f(x)|$$

6. Vérifier que M est bien définie et montrer que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{E}, M)$ dans lui même.
7. L'application v est-elle continue de $(\mathscr{E}, M)$ dans lui même ?
8. Vérifier que l'application $N : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathscr{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathscr{E}, N)$ dans $(\mathscr{E}, M)$. Les normes N et M sont-elles équivalentes ?
9. Si $f \in \mathscr{E}$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $p \in \mathscr{P}$ tel que $f(0) = p(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \le \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathscr{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{E}, N)$.

C. Etude de l'inversibilité de u et v

10. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathscr{P}$.
11. Déterminer $(u \circ v)(f)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?
12. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$. Conclure.

Application

13. Montrer que $f \in \mathscr{E}$ est paire (resp. impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

D. Etude des valeurs propres de u et v

14. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathscr{E}$.

15. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max_{t\in I} \left|f^{(n)}(t)\right|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$,
$$|\lambda| \cdot \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{2 m_n W_n}{\pi}$$
    En déduire que $f \in \mathscr{P}$.
16. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.
17. L'espace vectoriel $\mathscr{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? De v ? L'ensemble des valeurs propres de u (resp. de v) est-il une partie fermée de $\mathbb{C}$?

FIN DE L'ÉNONCÉ