DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 3

Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**. Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.

Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

Exercice 1 : Autour des produits infinis

Si n_0 est un entier naturel et si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$ par $P_n = \prod_{p=n_0}^{n} u_p = u_{n_0}u_{n_0+1}\cdots u_n$.

On dit que le produit infini $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$, de terme général u_n, converge si la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un nombre fini non nul. On notera alors $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Si la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ n'admet pas de limite finie ou si elle converge vers 0, on dit que le produit $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge.

1. En considérant le quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, montrer que pour que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge, il est nécessaire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels non nuls qui converge vers 1.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$.
   (b) Montrer que les produits infinis $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ et $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ sont de même nature.
3. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs.
   (a) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln u_n$ converge.
   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} (1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
   (c) Si, de plus, pour tout entier naturel n on a $0 < u_n < 1$, montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} (1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
4. On pose, dans cette question, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.
   (b) Montrer que le produit infini $\prod_{n\geqslant 2} (1+u_n)$ diverge. Qu'en conclut-on ?
5. Déterminer la nature des produits infinis suivants :
   (a) $\prod_{n\geqslant 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$
   (b) $\prod_{n\geqslant 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$

(c) $\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$ pour $x\in]0,+\infty[$

6. *Application* : Un peu d'histoire...

   (a) Retrouver, en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge.

   (b) Si p est un entier naturel tel que $p\geqslant 2$, que vaut $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p^k}$?

   (c) On note $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant : $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$, $p_5=11,\ldots$
   Voici un extrait d'un texte écrit par Leonhard Euler (mathématicien suisse) en 1737 (« Introduction à l'analyse infinitésimale ») :
   « ... *Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quel que soit le nombre de facteurs infinis ou finis. Par exemple, on aura* $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\text{etc.}$ *série où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux ; c'est-à-dire toutes les puissances de deux.*
   On aura ensuite $\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{18}+\text{etc.}$ *On ne retrouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 et 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 et 3. Donc, si au lieu de α, β, γ, δ, etc., on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, et qu'on suppose* $P=\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\text{etc.}}$, *on aura* $P=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\text{etc.}$, *série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers que ceux qui en sont formés par la multiplication. Or, comme tous les nombres sont ou des nombres premiers ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs...* »
   Utiliser librement ce texte pour montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 2 : Étude de normes matricielles

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbb{K}$ désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p=n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures à éléments dans $\mathbb{K}$.

Tout vecteur $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.

Pour $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X=(x_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\operatorname{Sp}A$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A)=\max_{\lambda\in\operatorname{Sp}A}|\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par $\forall X=(x_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{C}^n, N_\infty(X)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$.

On qualifie de norme matricielle toute norme φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété :

$$\forall(A,B)\in(\mathcal{M}_{n(\mathbb{K})})^2, \varphi(AB)\leq\varphi(A)\cdot\varphi(B).$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, on rappelle qu'une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si la convergence a lieu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme quelconque.

Partie I

I.1 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

I.2 Soit la matrice $G=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\2&-5&3\end{pmatrix}$.

a) La matrice G est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_3(\mathbb{C})$ telles que $G = PTP^{-1}$ avec T de la forme $\begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

I.3 Soit T une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner la forme de T^k et expliciter ses cœficients diagonaux.

I.4 Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho\left(A^k\right) = \left[\rho(A)\right]^k$.

I.5 Montrer que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \max\limits_{1\le i,j\le n} \left|a_{i,j}\right|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.6 En admettant l'existence de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la suite du problème montrera effectivement cette existence), montrer que pour toute norme N définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une constante C réelle positive telle que :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, N(AB) \le C N(A) N(B).$$

I.7 Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer, sans argument de continuité, que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si la suite $\left(P^{-1}AP\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.

I.8 **a)** Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer T^k et en déduire que la suite $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(|\lambda| < 1)$ ou $\left(\lambda = 1 \text{ et } \mu = 0\right)$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$. Dans ce cas, préciser $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$.

d) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose $M_A = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|$.

II.1 **a)** Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$: $N_\infty(AX) \le M_A N_\infty(X)$.

b) Montrer qu'il existe une constante réelle C_A telle que $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \le C_A N(X)$.

c) Montrer que l'ensemble $\left\{ \dfrac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite $\tilde{N}(A) = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \dfrac{N(AX)}{N(X)}$.

d) Montrer que : $\widetilde{N_\infty}(A) \le M_A$.

e) On reprend dans cette question la matrice G introduite en **I.2**. Déterminer un vecteur X_0 de $\mathbb{C}^3$ tel que $N_\infty(X_0) = 1$ et $N_\infty(GX_0) = 10$. En déduire la valeur de $\widetilde{N_\infty}(G)$.

II.2 Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right| = M_A$. En considérant le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{\left|a_{i_0,j}\right|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0$$

montrer que $M_A \le \widetilde{N_\infty}(A)$ et en déduire $\widetilde{N_\infty}(A) = M_A$.

II.3 Montrer :

a) $\tilde{N}(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0_n$.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A) \le |\lambda|\, \tilde{N}(A)$.

c) En déduire : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \tilde{N}(\lambda A) = |\lambda|\, \tilde{N}(A)$.

d) $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \tilde{N}(A+B) \le \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$.

e) $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X)$.

f) Déduire de ces résultats que $\tilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme N.

Fin de l'énoncé