DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 2

Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas $\boxed{\text{encadrées}}$, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.

Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.

Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.

LA CALCULATRICE EST AUTORISÉE [1].

⚠ Vous avez le choix entre un sujet CCINP et un sujet Centrale. **Ce dernier ne peut être choisi que par des étudiants ayant une note ⩾ 9 au devoir précédent.** Ne pas paniquer : le sujet CCINP est interminable. Quant au sujet Centrale... c'est un sujet Centrale.

Sujet 1 : (CCINP) Utilisations des matrices compagnon

Notations et définitions :

Dans tout le problème K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geqslant 2$ est un entier naturel.

Si u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E, on note $u^0 = id_E$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u^{n+1} = u^n \circ u$.

On note $K_n[X]$ la K-algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $\mathcal{M}_n(K)$ la K-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K de matrice unité I_n et $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$; les éléments de $\mathcal{M}_n(K)$ sont notés $M = (m_{i,j})$.

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$, on note ${}^tA$ la transposée de la matrice A, $\operatorname{rg}(A)$ son rang, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique et $\operatorname{Sp} A$ l'ensemble de ses valeurs propres.

Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ est un polynôme unitaire de $K_n[X]$ on lui associe

$$\text{la } \textbf{matrice compagnon } C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$

(c'est-à-dire la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

Les parties II. III. et IV. utilisent les résultats de la partie I. et sont indépendantes entre elles.

I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ de $K_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée.

1. Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_P} = kP$.
3. Soit Q un polynôme de $K_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\chi_A = Q$.
4. On note ${}^tC_P$ la transposée de la matrice C_P.
   (a) Justifier la proposition : $\operatorname{Sp} C_P = \operatorname{Sp} {}^tC_P$.
   (b) Soit λ élément de $\operatorname{Sp} {}^tC_P$, déterminer le sous-espace propre de ${}^tC_P$ associé à λ.
   (c) Montrer que ${}^tC_P$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et a toutes ses racines simples.
   (d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que ${}^tC_P$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde
   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{ est non nul.}$$
5. *Exemples :*
   (a) Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :
   $$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999I_n.$$
   (b) Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$; montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.

II. Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \text{ et } D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant r_i\}.$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

6. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.
   Montrer que pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$: $|\lambda x_i| \leqslant r_i \|X\|_\infty$.
7. Démontrer que $\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_k$.
8. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \ldots, 1 + |a_{n-1}|\}$.
9. *Application :*
   Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n : $n^a + n^b = n^c + n^d$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

III. Suites récurrentes linéaires

On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E, on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u.

On considère le polynôme $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \ldots - a_0u(n).$$

1. Mais elle ne vous sera pas d'un grand secours.

10. Montrer que si λ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F.
11. Soit φ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par : $u \mapsto \big(u(0), u(1), \ldots, u(p-1)\big)$, montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?
12. Pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant p-1$ on définit les élements e_i de F par :
$$e_i(i) = 1 \text{ et, lorsque } 0 \leqslant j \leqslant p-1 \text{ et } j \neq i,\ e_i(j) = 0.$$
    (a) Déterminer pour $0 \leqslant i \leqslant p-1$ $e_i(p)$.
    (b) Montrer que le système de vecteurs $\big(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}\big)$ est une base de F.
    (c) Soit u un élément de F, établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i) e_i$.
13. Si u est un élément de E, on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) : n \mapsto u(n+1)$. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f.
14. Si g est l'endomorphisme de F induit par f, montrer que la matrice de g dans la base $\big(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}\big)$ est ${}^tC_P$.
15. On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$.
    (a) Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g.
    (b) En déduire que, si u est élément de F, il existe des constantes complexes $k_0, k_1, \ldots, k_{p-1}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \ldots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n$.
16. *Exemple :* (On revient à la notation usuelle u_n)
    Soit a, b et c trois réels distincts.
    Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc.$$

IV. Matrices vérifiant : $\mathrm{rg}(U-V) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice A, on notera C_A la matrice compagnon du polynôme χ_A.

17. Une matrice A est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon C_A ?
    Pour tout couple (U, V) de matrices de $GL_n(K)$, on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :
    (*) : $\mathrm{rg}(U-V) = 1$
    (**) : Il existe une matrice inversible P telle que $U = P^{-1}C_UP$ et $V = P^{-1}C_VP$.
18. Montrer qu'un couple (U, V) de matrices distinctes de $GL_n(K)$ vérifiant (**) vérifie (*).
19. Déterminer un couple (U, V) de matrices de $GL_2(K)$ $(n = 2)$ vérifiant (*) mais ne vérifiant pas (**) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes χ_U et χ_V.

    Dans la suite de cette partie, (U, V) est un couple de matrices de $GL_n(K)$ vérifiant (*) et tel que χ_U et χ_V sont deux polynômes premiers entre eux.
    Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et de base B, on désigne par u et v les automorphismes de E tels que U (respectivement V) soit la matrice de u (respectivement v) dans la base B.
    Enfin on pose $H = \mathrm{Ker}(u - v)$.
20. Montrer que H est un hyperplan vectoriel de E.

21. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u et par v c'est-à-dire :
$$u(F) \subset F \text{ et } v(F) \subset F.$$
    On notera u_F (respectivement v_F) l'endomorphisme induit par u (respectivement v) sur F.
    On rappelle que χ_{u_F} divise χ_u.
    (a) Montrer que F n'est pas inclus dans H.
    (b) On suppose que $F \neq E$, montrer que $F + H = E$ puis que l'on peut compléter une base B_F de F par des vecteurs de H pour obtenir une base B' de E. En utilisant les matrices de u et v dans la base B' montrer que l'on aboutit à une contradiction.
    (c) Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par u et par v ?
22. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $G_j = \big\{x \in E, u^j(x) \in H\big\}$.
    (a) Montrer que les sous-espaces G_j sont des hyperplans vectoriels de E.
    (b) Montrer que $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$.
    (c) Soit y un vecteur non nul de $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$, on pose pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$: $e_j = u^j(y)$.
    Montrer que $B'' = (e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de E.
    (On pourra considérer $F = \mathrm{Vect}\big\{y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\big\}$ où p est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille $\big(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\big)$ est libre).
    (d) Montrer que la matrice de u (respectivement v) dans B'' est C_U (respectivement C_V).
    (e) Conclure.

Sujet 2 : (Centrale) Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

Notations et définitions

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\intercal$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_m f^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{tr}(f)$, χ_f, π_f et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A –

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M et $M^\intercal$ ont même spectre.
2. Montrer que $M^\intercal$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B – Matrices compagnons

3. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.
4. Soit λ une valeur propre de $C_Q^\intercal$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C – Endomorphismes cycliques

5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.
6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.
7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D – Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.
10. Montrer que $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.
11. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II Etude des endomorphismes cycliques

II.A – Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

12. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

Dans la suite de cette partie, on ne suppose plus f nilpotent, mais on suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

II.B –

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$ où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \mathrm{Ker}((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k : \begin{cases} F_k \to F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.

On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leqslant \dim(F_k)$?
16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.
17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathscr{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$.

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

18. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.
19. Justifier que f est cyclique.

II.C –

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

20. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ $A = QBQ^{-1}$ avec $Q \in GL_n(\mathbb{C})$. On écrit $Q = Q_1 + iQ_2$ avec Q_1 et Q_2 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid Q_1 + \lambda Q_2 \in GL_n(\mathbb{R})\}$ est non vide. En déduire que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
21. Montrer que f est cyclique.
    Conclure.

III Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.

22. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

III.A – Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

23. Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$.
24. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.
25. Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

III.B – Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

26. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.

On note d le degré de π_f.

27. Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $\left(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1)\right)$ est libre.
    Pour tout x non nul de E, on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, …, $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$.

28. Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1, $\psi_1 : \begin{cases} E_1 \to E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

29. Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Soit Φ la d-ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d.
On note $F = \{x \in E \mid \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

30. Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leqslant i \leqslant d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

31. Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.
32. Montrer que $E = E_1 \oplus F$.
33. En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \dots, E_r$, tous stables par f, tels que :
    — $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
    — pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
    — si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

III.C – Commutant d'un endomorphisme quelconque

34. Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n.
35. On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $C(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.

IV p-Cycles

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit que f est un « p-cycle » si, et seulement si, il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ soit génératrice de E et $f^p(x_0) = x_0$.

IV.A –

Dans cette partie, f désigne un p-cycle.

36. Montrer que $f^p = \mathrm{Id}$.
37. Soit $\mathscr{E} = \left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \left(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\right) \text{est une famille libre}\right\}$.
    Montrer que $\mathscr{E}$ admet un maximum noté m.
38. Montrer que : $\forall k \geqslant m, f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\right)$. En déduire que f est cyclique.
    Déterminer le nombre de valeurs propres distinctes de f.

IV.B –

39. Dans cette question, f désigne un n-cycle.
    Déterminer C, matrice compagnon de f.
    On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $U_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, calculer CU_k.
40. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $M = (m_{k,l})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant l \leqslant n}}$, avec $m_{k,l} = \overline{\omega}^{kl}$.
    Calculer $M\overline{M}$; en déduire que $M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1}.
41. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable.
    Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A.