Devoir en Temps Limité n° 1

Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.

Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.

Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.

LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.

Problème 1 : Différences finies et polynômes de Newton

On désigne dans la suite par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par Δ l'opérateur de différences finies, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

On note $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$ (donc, si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta^0(P) = P$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$,

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}.$$

Enfin, pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes N_k par $N_0(X) = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad N_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

Ce problème propose l'étude de l'endomorphisme Δ et de certaines de ses applications.

On confond dans ce problème polynôme et fonction polynôme. On se permet donc de noter $P(a)$ au lieu de $\tilde{P}(a)$ si $a \in \mathbb{R}$.

A. Étude de l'endomorphisme Δ

1.

1.a) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b) Calculer $\Delta(N_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Préciser son noyau et son image.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

3.a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ. On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta_n(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

Δ_n est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

3.b) Préciser le noyau et l'image de Δ_n.

3.c) Préciser la matrice de Δ_n relativement à la base $(N_0, N_1, ..., N_n)$. Montrer que $(\Delta_n)^{n+1} = 0$.

3.d) Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\left(\Delta^j(N_k)\right)(0)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

4.a) Justifier que P s'écrit $P = a_0N_0 + a_1N_1 + \cdots + a_nN_n$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ puis que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $a_j = \left(\Delta^j(P)\right)(0)$.

4.b) Montrer que pour $j \in [\![0, n]\!]$, $\Delta^j(P)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j+k} P(X+k)$.

Indication : on pourra écrire $\Delta = u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$ et reconnaître u, ou poser une récurrence.

4.c) Montrer que $[\forall\, k \in \mathbb{Z},\ \ P(k) \in \mathbb{Z}] \Longleftrightarrow \left[\forall\, j \in \mathbb{N},\ \ \left(\Delta^j(P)\right)(0) \in \mathbb{Z}\right]$.

5.

5.a) Justifier l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, i \in \mathbb{N},\ \ \Delta(B_i)(X) = X^i \text{ et } B_i(0) = 0.$$

5.b) Calculer B_3 en fonction des polynômes N_k.

Indication : on pourra utiliser **4.a)**.

5.c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} k^3$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Donner cette valeur sans utiliser B_3 ne rapportera aucun point.

B. Évaluation de l'erreur d'une interpolation

On se donne un entier $n \geqslant 2$ et une fonction f de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathscr{P}_n)$ suivant :

$$(\mathscr{P}_n) \qquad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall\, k \in [\![0, n]\!],\ \ P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose $N(x) = \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (x - j) = x(x-1)\cdots(x-n)$.

6.

6.a) Soit l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(0), \ldots, P(n)) \end{array} \right.$

Montrer que Φ est un isomorphisme.

6.b) En déduire que le problème $(\mathscr{P}_n)$ possède une unique solution notée $P_{n,f}$.

7. On étend de manière naturelle la définition de la partie A de Δ en une fonction de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on pose $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

7.a) Pour $0 \leqslant k \leqslant j$, en s'inspirant de ce qui a été fait en **A.4.b)**, expliciter $\Delta^j(f)$ et en déduire que $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0, 1, \ldots, j$: $f(0), f(1), \ldots, f(j)$.

T.S.V.P. ☞

7.b) Pour $j \in [\![0,n]\!]$, comparer $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et $\left(\Delta^j(P_{n,f})\right)(0)$.

7.c) En déduire l'expression de $P_{n,f}$ en fonction des $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et des polynômes N_j.

8. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,n]$.

8.a) Justifier que $M_n = \sup\limits_{t\in[0,n]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$ existe.

8.b) [1] Soit $x \in [0,n]$, non entier. Montrer que $\exists\, c_x \in]0,n[,\quad f(x) - P_{n,f}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} N(x)$.

Indication : on pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_{n,f}(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.

8.c) En déduire que $\sup\limits_{t\in[0,n]} \left|f - P_{n,f}\right| \leqslant \dfrac{M_n}{n+1}$.

Indication : on pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in [\![0, n-1]\!]$.

Malheureusement, $\dfrac{M_n}{n+1}$ ne tend pas toujours vers 0 si $n \to +\infty$. C'est le cas également pour l'interpolation de Lagrange (sur un intervalle $[a,b]$ indépendant de n au lieu de $[0,n]$ comme ici) avec une démonstration similaire : c'est le phénomène de Runge. Essayez par exemple de tracer les premiers polynômes interpolateurs de $x \mapsto \dfrac{1}{1+25x^2}$ sur $[-1,1]$ pour l'observer. On ne peut pas éviter ce phénomène, mais on peut le réduire en choisissant judicieusement les points d'interpolation (le meilleur choix possible étant... les racines des polynômes de Tchebychev !). Des interpolations plus fines, avec des fonctions splines par exemples, sont donc préférables.

Problème 2 : Idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Notations et définitions

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathscr{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathscr{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q carrée inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.

A étant un élément de $\mathscr{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, on appelle noyau de A, noté $\operatorname{Ker}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$: $\operatorname{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\right\}$.

On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$, noté $\operatorname{Im}(A)$: $\operatorname{Im}(A) = \left\{AX, X \in \mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})\right\}$.

Un sous-groupe J de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal [2] à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in J, MA \in J.$$

Un sous-groupe J de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in J, AM \in J.$$

Si J est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que J est un idéal bilatère de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre n.

---

1. Cette question n'est pas facile, sauf si vous vous rappelez de la démonstration du théorème des accroissements finis. Prévoir d'appliquer le théorème de Rolle de façon répétée, en commençant par remarquer que φ a $n+2$ zéros...
2. Attention : la notion d'idéal du programme s'applique à un anneau commutatif. Ici, n'étant pas sur un anneau commutatif, il convient de distinguer multiplication à gauche et à droite. Mais la notion d'idéal bilatère rejoint celle du programme.

A. Résultats préliminaires

Soit A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose A de rang r.

1. Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ une base du noyau de u, montrer l'existence d'une famille de vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ telle que $(e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u)$.
   En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}\,(u)$.
   En déduire que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$.
   (c) Peut-on compléter la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ en une base de $\mathbb{R}^n$?
   En déduire que A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et 0 une matrice nulle de taille convenable.
2. Soit D une matrice diagonale d'ordre n telle que r éléments de la diagonale sont égaux à 1, les $n-r$ autres sont nuls. Montrer que A est équivalente à D.

B. Application

On considère une application f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2, f(AB) = f(A)f(B).$$

1. Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ est non nul.
2. A est une matrice de rang r, strictement inférieur à n.
   (a) Montrer l'existence de $r+1$ matrices, notées A_1, A_2, ..., A_{r+1}, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1 A_2 \dots A_{r+1}$ soit nul.
   (b) En déduire que $f(A) = 0$.
3. Que peut-on en conclure pour l'application f ?
   Donner un exemple d'une telle application.

C. Idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Soit J un idéal bilatère de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $I \in J$, alors $J = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si J contient une matrice inversible alors $J = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On suppose que J n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à J.
   (a) Montrer que J contient la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer l'existence de $n-r+1$ matrices, notées A_1, A_2, ..., A_{n-r+1}, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.
4. Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

— Fin de l'énoncé —