Programme de colle – MP 1

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MPSI)

Voir programme page suivante.

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *consolider les acquis de MPSI concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens ;*
- *introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, notamment afin de donner un exemple important de convergence dans un espace normé ;*
- *à travers l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux, approfondir simultanément les connaissances de MPSI relatives aux isométries et celles de MP relatives à la réduction des endomorphismes.*

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.

La notion de forme quadratique est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Caractérisation métrique du projeté orthogonal. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel.	⇆ PC : polariseur, loi de Malus.
b) Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel	
Suite totale. Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E, et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n)$, alors, pour tout x de E, $\big(p_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.	Exemples de suites de polynômes orthogonaux. ⇆ I : calcul explicite des polynômes d'une telle suite ; application à l'approximation des fonctions.
c) Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.	Lien avec les matrices symétriques réelles. La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.	Interprétation matricielle de ce résultat. La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme. ⇆ SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.
d) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Lien avec les matrices orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Interprétation dans le registre matriciel. La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». ⇆ SI : liaisons entre solides.

La réduction des isométries et l'étude des rotations en dimension 3 n'auront été traitées qu'en tout début de semaine.
Semaine prochaine : Séries entières.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Inégalité de Cauchy-Schwarz pour une **forme bilinéaire symétrique positive**. Cas d'égalité pour un produit scalaire.

(ii) Lorsqu'il est de dimension finie, l'orthogonal d'un sous-espace est un supplémentaire. Expression du projeté en base orthonormale.

(iii) Distance à un sous-espace de dimension finie.

(iv) Caractérisation des suites totales par des projecteurs orthogonaux.

(v) Matrice en base orthonormale d'un endomorphisme symétrique, d'une isométrie. Les projections orthogonales sont les projections symétriques et ne sont pas des automorphismes orthogonaux en général.

(vi) [Vu lundi seulement] Théorème spectral.

(vii) **CCINP 39** : On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

  (a) i. Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

  ii. Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.
  Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
  On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

  (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
  Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

  (c) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$). Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

(viii) **CCINP 68** : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

  (a) Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :

  i. sans calcul,

  ii. en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,

  iii. en utilisant le rang de la matrice,

  iv. en calculant A^2.

  (b) On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.
  Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

(ix) **CCINP 76** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

  (a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

  ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

  (b) Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b]\ f(x) > 0 \right\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

(x) **CCINP 77** : Soit E un espace euclidien.

  (a) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.

  (b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

  i. Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

  ii. Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

(xi) **CCINP 78** : Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

  (a) Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.

  i. Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

  ii. Démontrer que u est bijectif.

  (b) Démontrer que l'ensemble $\mathscr{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

  (c) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
  Prouver que : $u \in \mathscr{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

(xii) **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

(a) Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

(b) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $\forall\,(f,g)\in E^2$, $\big(f|g\big) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

(c) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(xiii) **CCINP 92** : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B)\in E^2$, $\langle A\,,B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

(a) Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E. Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

i. Prouver que $E = S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.

ii. Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

(c) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.

Programme de MPSI

Extrait du programme officiel :

A. Espaces préhilbertiens réels

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f\|g) = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Notations $\langle x,y\rangle$, $(x\|y)$, $x\cdot y$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Formule de polarisation : $2\langle x,y\rangle = \\|x+y\\|^2 - \\|x\\|^2 - \\|y\\|^2$.	Exemples : sommes finies, intégrales.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
d) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète. Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.	⇆ PC et SI : mécanique et électricité.
Produit mixte dans un espace euclidien orienté.	Notation $[x_1,\ldots,x_n]$. Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V.	Notation $d(x, V)$.
f) Hyperplans affines d'un espace euclidien	
Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.	Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$.
Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Distance à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$: $\lvert\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\rvert$.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
g) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormale.	
Symétrie orthogonale, réflexion.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
h) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie. Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive, négative.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
i) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.	Lien entre les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs. ⇆ SI : mécanique.
Classification des isométries d'un plan euclidien orienté.	