Programme de colle – MP 1

Dénombrement (révisions de MPSI)

Voir programme page suivante.

Probabilités

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω.	On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application P définie sur $\mathscr{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ s'identifie, via la formule $$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.	
b) Propriétés élémentaires des probabilités	
Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$. Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$. Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.	Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$.

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MPSI)

Voir programme page suivante.

Les révisions s'arrêtent à l'orthogonal d'un sous-espace.

Les projections orthogonales et distances à un sous-espace ne seront au programme que la semaine prochaine, avec les isométries.

Semaine prochaine : Espaces préhilbertiens, isométries.

Questions de cours :

(i) Définitions d'une tribu, d'une probabilité, d'un système complet d'événements, d'un événement négligeable, d'un événement presque sûr, d'une probabilité conditionnelle, de l'indépendance mutuelle.

(ii) Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$.

(iii) Énoncé et démonstration des formules de probabilités composées, totales, Bayes.

(iv) Si des événements sont mutuellement indépendants, on peut passer certains événements au complémentaires en conservant l'indépendance. Démonstration pour le passage d'un événement au complémentaire.

(v) Inégalité de Cauchy-Schwarz pour une forme bilinéaire symétrique positive. Cas d'égalité pour un produit scalaire.

(vi) Lorsqu'il est de dimension finie, l'orthogonal d'un sous-espace est un supplémentaire.

(vii) **CCINP 112** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

(a) Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

(b) Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.

(c) Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A\cup B\cup C = E$.

(viii) **CCINP 101** : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

(a) i. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

ii. Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

(b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

ii. Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

iii. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

(c) Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

(ix) **CCINP 105** :

(a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

(b) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

i. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

iii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

(x) **CCINP 107** : On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

(a) Calculer p_1.

(b) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

(xi) **CCINP 39** : On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

(a) i. Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

ii. Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

(c) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$). Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

(xii) **CCINP 77** : Soit E un espace euclidien.

(a) Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.

(b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

i. Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

ii. Démontrer que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

(xiii) **CCINP 76** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

(a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ii. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

(b) Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

(xiv) **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

(a) Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

(b) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2$, $\left(f|g\right) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

(c) Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(xv) **CCINP 92** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

(a) Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E. Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

i. Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

ii. Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

(c) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.

Programme de MPSI

Extrait du programme officiel :

A. Dénombrement

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis.	
Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

B. Probabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Expérience aléatoire et univers	
L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers. Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement « A et B », événement « A ou B », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	On se limite au cas où cet univers est fini.
b) Espaces probabilisés finis	
Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega)=1$ et, pour toutes parties disjointes A et B, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Probabilité uniforme. Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.	Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P(A\|B)=P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.	On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste. L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.
Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales.	
Formules de Bayes : 1. si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(A)>0$ et $\mathbb{P}(B)>0$, alors $$P(A\,\|\,B)=\frac{P(B\,\|\,A)\,P(A)}{P(B)}$$ 2. si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors $$P(A_j\,\|\,B)=\frac{P(B\,\|\,A_j)\,P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B\,\|\,A_i)\,P(A_i)}$$	On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.
d) Événements indépendants	
Couple d'événements indépendants.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B)=P(A)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \dots, A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

C. Espaces préhilbertiens réels

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f\|g) = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Formule de polarisation : $2\langle x, y\rangle = \\|x+y\\|^2 - \\|x\\|^2 - \\|y\\|^2$.	 Exemples : sommes finies, intégrales.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
d) Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète.	
Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.	$\leftrightarrows$ PC et SI : mécanique et électricité.
Produit mixte dans un espace euclidien orienté.	Notation $[x_1, \dots, x_n]$. Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.