

Exercice :

Systeme proie-prédateur et équation de Lotka-Volterra

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Sujet d'étude

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra

On s'intéresse à l'équation de Lotka-Volterra permettant de modéliser un système de proies ($N(t)$) et de prédateurs ($P(t)$). Les prédateurs mangent des proies, mais si la population de proies diminue, celle des prédateurs aussi, puis celle des proies augmente, etc.



Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Problème

Soit à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} N' = aN - bNP \\ P' = cNP - dP \end{cases}$$

Où a (reproduction des proies), b (mortalité des proies due aux prédateurs), c (mortalité des prédateurs) et d (de reproduction des prédateurs en fonction des proies) sont déterminés par expérimentation biologique. On prendra $a = 0,3$; $b = 0,013$; $c = 0,006$ et $d = 0,35$ et diverses conditions initiales $N(0), P(0)$.

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Problème

Soit à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} N' = aN - bNP \\ P' = cNP - dP \end{cases}$$

1. Comment s'écrit la méthode d'Euler dans ce cas ?

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Problème

Soit à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} N' = aN - bNP \\ P' = cNP - dP \end{cases}$$

1. Comment s'écrit la méthode d'Euler dans ce cas ?

Le schéma général est $Y_{k+1} = Y_k + h \times F(t_k, Y_k)$.

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Problème

Soit à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} N' = aN - bNP \\ P' = cNP - dP \end{cases}$$

1. Comment s'écrit la méthode d'Euler dans ce cas ?

Le schéma général est $Y_{k+1} = Y_k + h \times F(t_k, Y_k)$.

$$\text{Ici, } Y_k = \begin{pmatrix} N_k \\ P_k \end{pmatrix} \text{ et } F\left(t, \begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} aN - bNP \\ cNP - dP \end{pmatrix}.$$

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Problème

Soit à résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} N' = aN - bNP \\ P' = cNP - dP \end{cases}$$

1. Comment s'écrit la méthode d'Euler dans ce cas ?

Le schéma général est $Y_{k+1} = Y_k + h \times F(t_k, Y_k)$.

$$\text{Ici, } Y_k = \begin{pmatrix} N_k \\ P_k \end{pmatrix} \text{ et } F\left(t, \begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} aN - bNP \\ cNP - dP \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} N_{k+1} = N_k + h(aN_k - N_k P_k) \\ P_{k+1} = P_k + h(N_k P_k - bP_k) \end{cases}$$

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

2. Écrivez l'instruction permettant de résoudre le système avec `odeint` à partir des conditions initiales $N(0) = 85$ et $P(0) = 50$ et $t \in [0, 40]$ avec un pas de 10^{-4} .

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

odeint

2. Écrivez l'instruction permettant de résoudre le système avec `odeint` à partir des conditions initiales $N(0) = 85$ et $P(0) = 50$ et $t \in [0, 40]$ avec un pas de 10^{-4} .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

(a, b, c, d) = (.6 , .013 , .006 , .35)

def F(Y,t):
    N, P = Y
    return np.array([a*N - b*N*P, c*N*P - d*P])

t = np.arange(0, 40, 1e-4)
sol = odeint(F, np.array([85, 50]), t)

N = sol[:, 0]
P = sol[:, 1]
```

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Tracé des trajectoires

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra

3. Écrivez les instructions permettant de tracer les "trajectoires" $N(t)$ et $P(t)$ sur un même graphe.

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Tracé des trajectoires

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra

3. Écrivez les instructions permettant de tracer les "trajectoires" $N(t)$ et $P(t)$ sur un même graphe.

```
plt.plot(t, N, t, P, '--')  
plt.legend(['Proies', 'Prédateurs'], loc='best')  
plt.xlabel('$t$')  
plt.ylabel('nombre de proies/prédateurs')  
plt.savefig('proies_pred_traj')
```

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Résultat

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

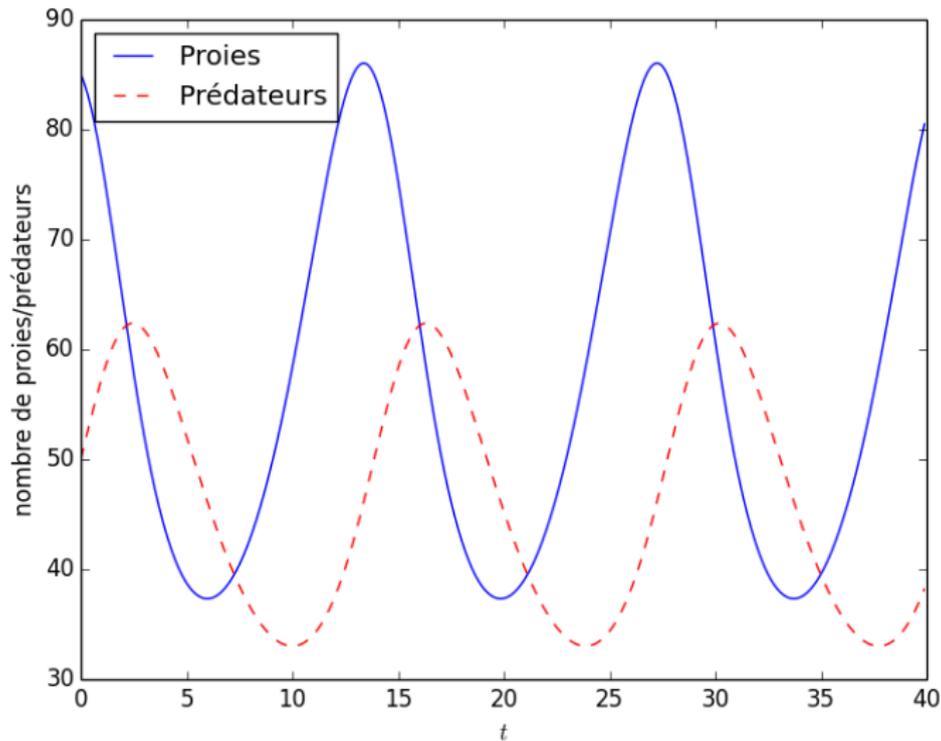
Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

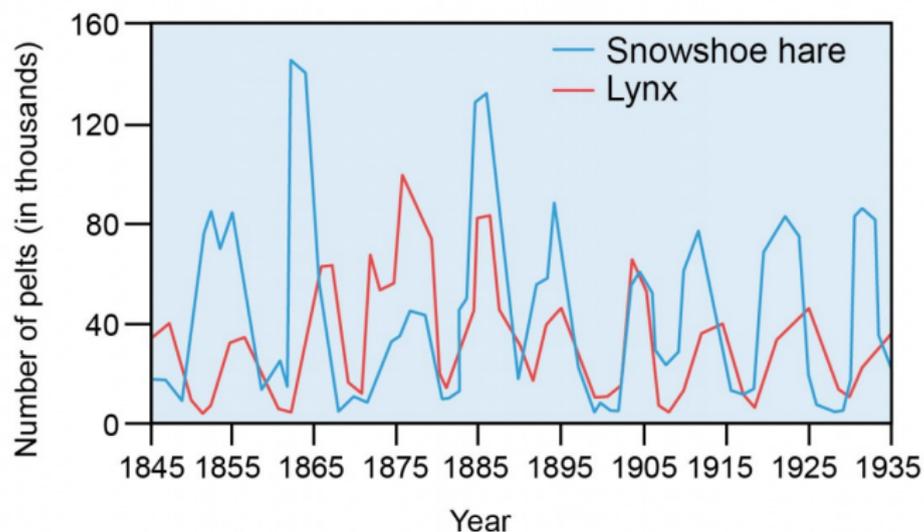
Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?



Données réelles

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra



Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

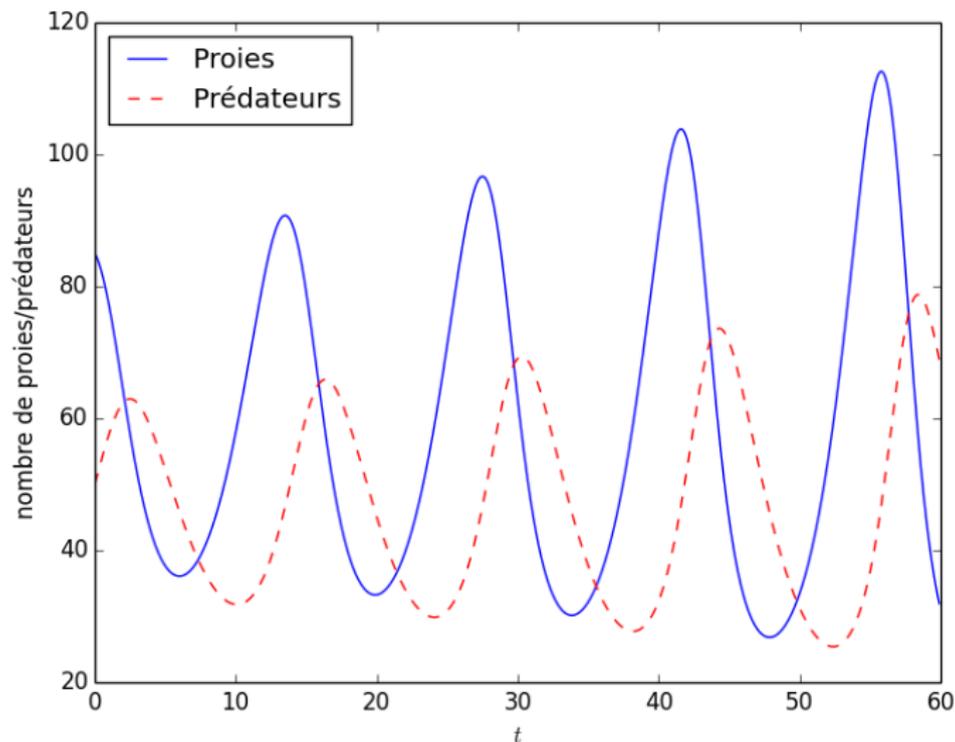
Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Avec la méthode d'Euler ?

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra



Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

4. Écrivez les instructions permettant de tracer le portrait de phase $t \mapsto (N(t), N'(t))$.

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

4. Écrivez les instructions permettant de tracer le portrait de phase $t \mapsto (N(t), N'(t))$.

```
dN = a*N - b*N*P
plt.plot(N, dN)
plt.xlabel('$N(t)$')
plt.ylabel("$N'(t)$")
plt.title('Portrait de phase de $N$')
plt.grid()
plt.savefig('proies_pred_portrait_phase')
```

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

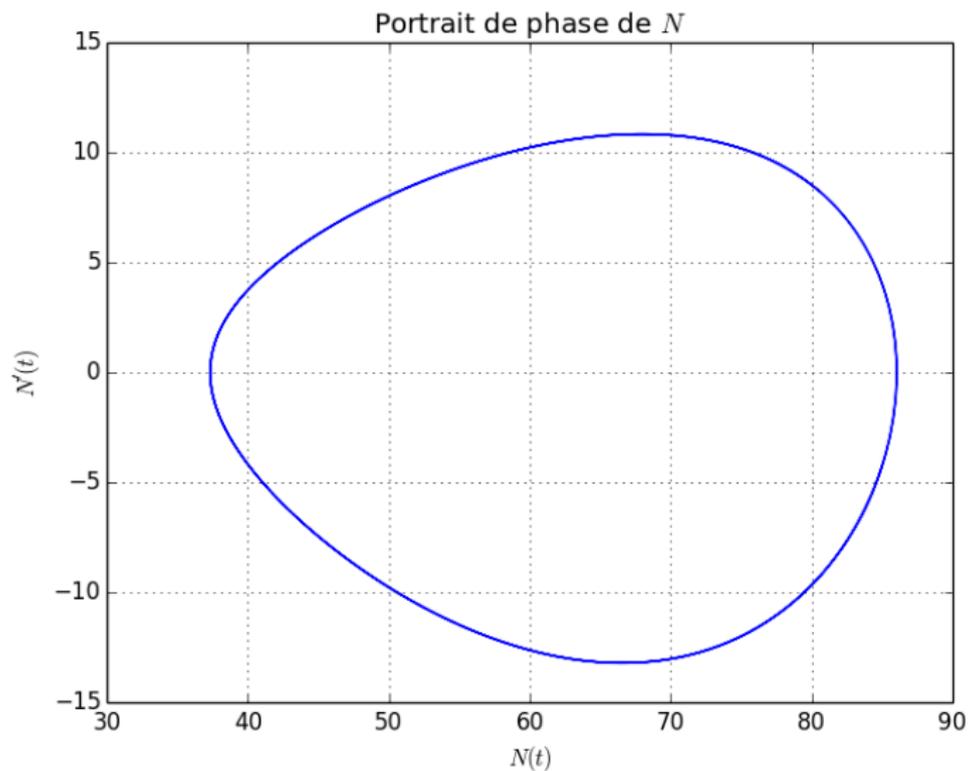
Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Résultat

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra



Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?

Plusieurs conditions initiales

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra

Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

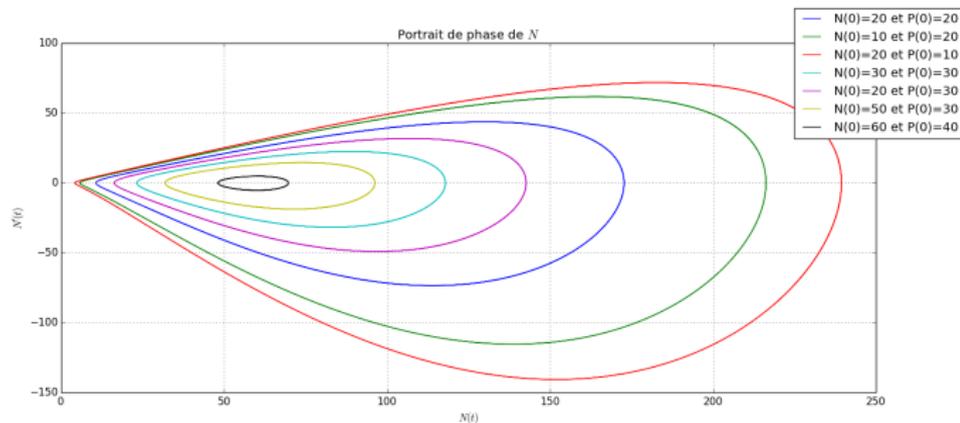
Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

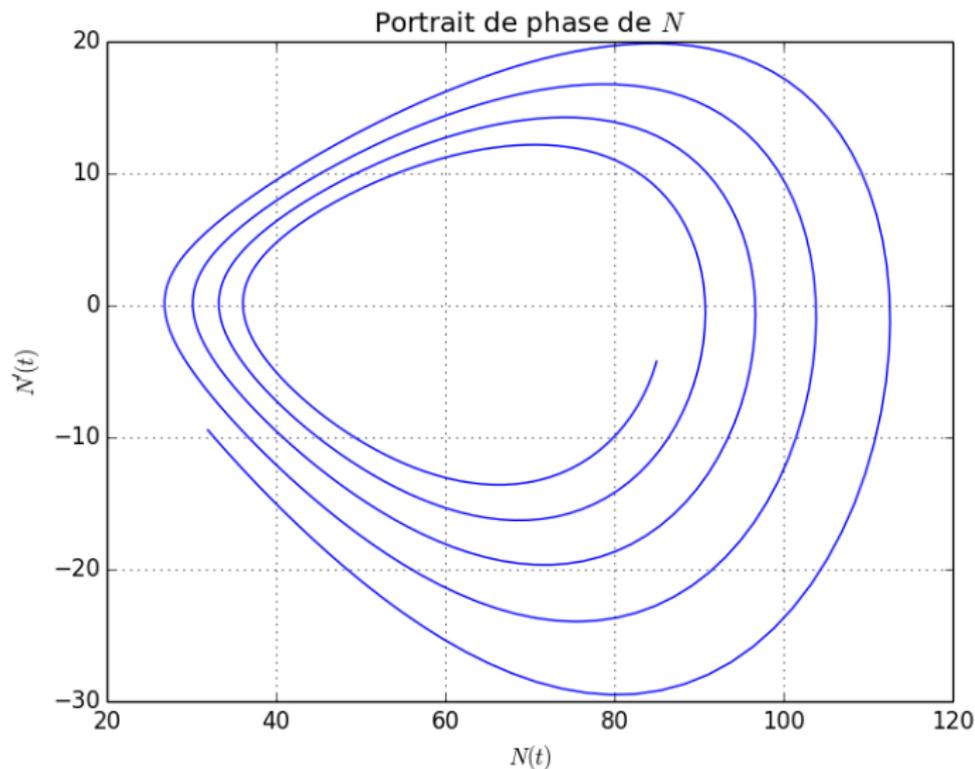
Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?



Avec la méthode d'Euler ?

Exercice :
Système
proie-prédateur et
équation de
Lotka-Volterra



Sujet d'étude

Problème

Tracé des trajectoires

Résultat

Données réelles

Avec la méthode d'Euler ?

Portraits de phase

Plusieurs conditions
initiales

Avec la méthode d'Euler ?