CCP MP MATHS 1, Mai 2012

Exercice 2 : Continuité d'une fonction définie par une intégrale

1. Cours :

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in I, t \to g(x,t) \text{ est intégrable sur } J \\ \forall t \in J,\ x \to g(x,t) \text{ est continue sur } I \\ \exists \varphi \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{R}^+) \text{ tq } \forall x \in I, \forall t \in J,\ |g(x,t)| \leqslant \varphi(t) \\ \text{avec } \varphi \text{ intégrable sur } J \end{array}\right\} \Rightarrow f : x \to \int_J g(x,t)dt \text{ est continue sur } I.$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$

   $\forall t \geqslant 0, x \to g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x,t)| \leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$. Or la fonction $t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

   On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R},\ t \to g(x,t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (majorée en valeur absolue par une fonction intégrable) et que l'hypothèse de domination est satisfaite avec la fonction $\varphi : t \to \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$.

   Alors, par le théorème cité au dessus, la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$

3. $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2,\ xe^{-xt} \geqslant 0$. $\forall M > 0,\ \displaystyle\int_0^M xe^{-xt}dt = [-e^{-xt}]_{t=0}^M = 1 - e^{-xM}$. Et en faisant tendre M vers $+\infty$ on obtient : $\forall x > 0,\ f_2(x) = 1$ et $f_2(0) = 0$.

   La fonction f_2 n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $[0, +\infty[$.

   On vérifie ainsi que, sans l'hypothèse de domination, le théorème est faux : la fonction f de l'introduction peut ne pas être continue sur I.