COMPACITÉ, CONNEXITÉ PAR ARCS

- Pour montrer qu'une partie est compacte :
  - ⋆ Si on est en dimension finie, on montre souvent qu'elle est fermée et bornée.
  - ⋆ On peut aussi montrer qu'il s'agit de l'image d'un compact par une fonction continue.
  - ⋆ Autre possibilité : un produit d'un nombre fini de compacts.
  - ⋆ Si rien de tout cela fonctionne, revenir à la définition.
- Usage courant de la compacité : démonstration par l'absurde, permettant d'obtenir une suite de laquelle on extrait une suite convergente, etc. (exemple : preuve du théorème de Heine.)
- Parfois, on est amené à utiliser un résultat « type compacité » comme par exemple un minimum ou un maximum atteint par une fonction f, mais on n'est pas sur un compact. L'idée est alors de traiter séparément l'étude des points « loin » ie hors d'une certaine boule, et ceux de la boule (fermée et donc compacte en dimension finie) pour conclure...
- Pour démontrer qu'un ensemble est connexe par arcs, on revient à la définition ou on le fait apparaître comme image continue d'un ensemble connexe par arcs. On peut aussi reconnaître une partie étoilée voire convexe.
- Pour montrer qu'un ensemble n'est pas connexe par arcs, on peut trouver une application continue qui ne l'envoie pas sur un connexe par arcs (de $\mathbb{R}$ par exemple : pas un intervalle).
- L'utilisation la plus fréquente de la connexité par arcs est celle du théorème des valeurs intermédiaires. Si on croit reconnaître dans une question une utilisation du théorème des valeurs intermédiaires et si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle, on regarde si cet ensemble de départ ne serait pas par hasard connexe par arcs.

Exercices vus en cours

1 Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.

1. Montrer qu'il y a équivalence entre
   (i) ℓ est valeur d'adhérence de u.
   (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ est infini.
   (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\{n \geqslant p, u_n \in B(\ell,\varepsilon)\}$ n'est pas vide.
2. Application classique : en déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérences de u est fermé.

2 Dans $\mathbb{K}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |p_k|$, montrer que la sphère unité est fermée bornée mais n'est pas compacte.

3 Montrer que $\mathcal{O}(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^\top M = I_n\}$ est compact.

4 Montrer que la boule unité fermée de $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte.

Compacité

5 **Écrits Mines** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{AQ, Q \in \mathcal{O}(n)\}$ est compact.

6 **Écrits Mines – Propriété de Borel-Lebesgue**

Montrer que si K est compact, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut « recouvrir » K par des boules ouvertes de rayon ε, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de K telle que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon).$$

7 Soit $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n$ des points de E, $A = \{a_1,\dots,a_n\}$.

On appelle **enveloppe convexe** de A l'ensemble des barycentres de ses points à cœfficients positifs. Notons-la $\mathrm{Conv}(A)$.

1. Montrer que $K = \left\{(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.

8 Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y) \in K,\quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. (a) Montrer que f admet au plus un point fixe dans K.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe dans K, que l'on notera a.
   On pourra étudier sur K la fonction $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$.
2. Soit $(x_n)_n$ une suite définie par $x_0 \in \mathbb{K}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Démontrer que $(x_n)_n$ converge vers a.

9 **Diamètre d'une partie bornée**

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E.

1. Justifier l'existence de $D = \sup\{\|x - y\|,\ (x,y) \in A^2\}$. On dit que D est le diamètre de A.
2. Démontrer que si A est compacte, alors il existe $(a,b) \in A^2$ tel que $D = \|a - b\|$.
3. Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le diamètre de la boule ouverte de centre a et de rayon r.

10 Soit (u_n) une suite convergente dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E,\|\cdot\|)$, ℓ sa limite. Montrer que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

11 Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que f atteint sur E un minimum global.

12 Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, F_n le sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus n, $f \in E$.

Montrer que la distance de f à F_n est atteinte : on a une fonction polynomiale $\phi_n \in F_n$ telle que

$$\|f - \phi_n\|_\infty = \mathrm{d}(f, F_n) = \inf_{\phi \in F_n} \|f - \phi\|_\infty$$

Normes subordonnées

13 **Normes subordonnées**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note $S = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\}$ et $B = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\| \leqslant 1\}$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée et f l'application de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX.$$

   (a) Justifier que f est continue sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Démontrer que les ensembles $E1 = \{\|AX\|,\ X \in S\}$, $E2 = \{\|AX\|,\ X \in B\}$ et $E3 = \left\{\dfrac{\|AX\|}{\|X\|},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ admettent une borne supérieure.
   (c) Démontrer que les trois sup sont égaux.

   Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $N(A)$ ce sup commun.
2. Démontrer que N est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.
   On dit que N est la norme subordonnée à $\|\cdot\|$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on note N sa norme subordonnée.
   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et on note N sa norme subordonnée.
   Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.

Connexité par arcs

14 Démontrer qu'un cercle et qu'un segment ne peuvent pas être homéomorphes : il n'existe pas de bijection f entre les deux telle que f et f^{-1} soient continues.

15 Étudier la connexité par arcs de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

16 Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

17 **Connexe par arcs ⇒ connexe**

En utilisant une fonction indicatrice, montrer que si A partie d'un evn est connexe par arcs, les seules parties de A à la fois ouvertes et fermées relativement à A sont $\varnothing$ et A.

Lorsque c'est le cas, on parle d'ensemble **connexe**.