CONVEXITÉ

Exercices vus en cours

1 Soit A, B, C trois points du plan $\mathbb{R}^2$. Déterminer la position de $G = \text{bar}\big((\text{A},\alpha),(\text{B},\beta),(\text{C},\gamma)\big)$ où $\alpha+\beta+\gamma=1$ en fonction su signe de α, β et γ.

2 Montrer qu'une fonction convexe sur I est admet en chaque point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que f est continue sur $\mathring{I}$. Est-ce le cas sur I ?

3 Étudier la convexité de exp, ln, $t \mapsto t^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sin, tan, ζ, Γ.

4 Montrer les inégalités suivantes

1. **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+$,
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$
Qu'obtient-on en remplaçant x_i par $\dfrac{1}{x_i}$?
2. $\forall x > -1,\ \ \ln(1+x) \leqslant x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.
4. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

Barycentres, parties convexes

5 **Enveloppe convexe**

L'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel réel E est le plus petit convexe contenant A.
Comment l'exprimer à l'aide d'une intersection ?
Comment décrire ses éléments à l'aide de barycentres ?

Solution de 5 : Enveloppe convexe

C'est l'intersection de tous les convexes contenant A et aussi l'ensemble des barycentres à cœfficients positifs.
À chaque fois, c'est bien convexe, contenant A et plus petit que tous les autres.

6 **Points extrémaux** Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dit qu'un point x de C est extrémal lorsque :
$$\forall (a,b) \in C^2 \qquad x \in [a,b] \Longrightarrow \big(x = a \quad \text{ou} \quad x = b\big)$$
Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe ayant n points extrémaux, $n \geqslant 2$.
Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe borné non vide n'ayant aucun point extrémal.
Existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$ des parties qui ont un unique point extrémal ?

Solution de 6 : Points extrémaux

Pour le premier, un polygone à n côté convient.

Pour le deuxième, un disque ouvert.

Pour le troisième, la partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.

7 Montrer que dans un evn, l'intérieur et l'adhérence d'un convexe sont convexes.

8 **Théorème de Gauss-Lucas**

Soit P un polynôme de degré au moins 2 de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P' se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire sont des barycentres à cœfficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à $\dfrac{P'}{P}$.

Solution de 8 : Théorème de Gauss-Lucas

Quantité conjuguée....

$$0 = \sum \lambda_k (z - x_k) \text{ avec } \lambda_k = \frac{1}{|z - x_k|^2}.$$

Fonctions convexes

9 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, f et g ont même monotonie et f et g sont convexes sur I. Montrer que fg est convexe sur I.

Solution de 9 :

Vérifier que $((1-t)f(x)+tf(y))((1-t)g(x)+tg(y)) \leqslant (1-t)f(x)g(x)+tf(y)g(y)$ en développant puis factorisant la différence.

10

1. Montrer que la composée (à gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.
2. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ dont la composée avec ln (à gauche) est convexe (on parle de fonction log-convexe) est une fonction convexe.

Solution de 10 :

1. Il suffit de composer l'inégalité de convexité avec la fonction croissante.
2. Composer avec l'exponentielle.

11 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe. Étudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

Solution de 11 :

Elle est convexe, en passant par la définition, directement.

12 **Inégalité de Bernoulli** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \forall\, x \geqslant 0,\ \ x^{n+1} - (n+1)\,x + n \geqslant 0$.

Solution de 12 : Inégalité de Bernoulli

$f : x \mapsto x^{n+1}$ est convexe, sa tangente en 1 a pour équation $y = (n+1)(x-1)+1$.

13 Montrer que $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2$ on a : $\ln \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$.

Solution de 13 :

Concavité de $\ln \circ \ln$.

14 Soit f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' \leqslant 1$. Montrer que $f(0) - 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(1) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Solution de 14 :

Convexité de $g : x \mapsto x^2 - 2f(x)$ appliquée en $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 0 + \dfrac{1}{2} \cdot 1$.

15 Montrer que parmi les polygones inscrits dans un cercle donné, les polygones réguliers ont un périmètre maximal.

Solution de 15 :

En notant θ_k les angles au centre, pour un n-gone inscrit dans un cercle de rayon R, le périmètre est $\sum_{k=1}^{n} 2R \sin\theta_k$ avec sin concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

16 Soit $f :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante. *(On pourra raisonner par l'absurde.)* Le résultat est-il vrai si f définie sur $\mathbb{R}^+$?

Solution de 16 :

Sinon, si on a $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$. Si $z > y$, $\tau_x(y) \leqslant \tau_x(z)$ donne $f(z) \geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$ donc $f(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Si on a $x < y$ tels que $f(x) > f(y)$. Si $z < x$, $\tau_x(z) \leqslant \tau_x(y)$ donne $f(z) \geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x)$ donc $f(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Sur $\mathbb{R}^+$, une demi-droite convient, ou $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

17 Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ convexe, croissante, non constante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Solution de 17 :

Si $x > 1$, $\tau_0(1) \leqslant \tau_0(x)$ donne $f(x) \geqslant (f(1) - f(0))x + f(0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

18 **Inégalité de Jensen continue** Soit $f :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\phi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a < b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi(x) \geqslant \phi(\gamma) \ + \ (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi\ :\ x \longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi\ :\ x \longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de 18 : Inégalité de Jensen continue

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.
3. $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

19 Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On note $\alpha = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$ et $\beta = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $ab \leqslant \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.
2. On veut en déduire l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{K}^n$:
$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}.$$
Commencer par la démontrer en supposant $\|x\|_p = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p} = 1$ et $\|y\|_q = \sqrt[q]{\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^q} = 1$, puis, dans le cas général, en normalisant les vecteurs (c'est-à-dire en les divisant par $\|x\|_p$ et $\|y\|_q$, respectivement (Attention : on ne sait pas encore que ce sont des normes) lorsque c'est possible.
Quelle inégalité classique retrouve-t-on en particulier ?
3. En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1}$, en déduire l'inégalité de Minkowski :
$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}.$$
4. Montrer que $\|x\|_p = \sqrt[p]{\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer la limite de $\|x\|_p$ lorsque $p \to +\infty$.

Remarque : On peut faire le même travail et obtenir des résultats similaires avec des intégrales de fonctions continues sur un segment $[a, b]$.

Solution de 19 : Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$

1. Concavité de ln.
2. Appliquer la première question à $\dfrac{|x_k|}{\alpha}$ et $\dfrac{|y_k|}{\beta}$ et sommer.
3. Remplacer α et β.
4. Utiliser deux fois la question précédente dans l'indication.
5. Seule l'IT est difficile mais c'est la question précédente.
6. $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\,\|x\|_\infty$.

20 Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+,\ \ 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right)^{1/n}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

Solution de 20 :
Convexité de $x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$.

21 **Fonctions mid-convexes**

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.
(On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x, y) = \Big\{ t \in [0, 1] \mid f(tx + (1-t)y) \leqslant t f(x) + (1-t) f(y) \Big\}$$

contient tous les $\dfrac{k}{2^n}$*...)*

Solution de 21 : Fonctions mid-convexes
Montrer l'indication par récurrence puis utiliser un argument de densité.

22 Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I, alors f' est continue sur I.

(On pourra appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ et utiliser le fait qu'une fonction croissante a des limites à gauche et à droite.)

23 Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite ou $+\infty$ en $+\infty$.
2. Montrer que si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ en $+\infty$.