CONVEXITÉ

- Désormais, pour démontrer des inégalités, il faudra aussi penser à la convexité.
- En général (et heureusement), les fonctions rencontrées sont dérivables voire deux fois dérivables. La monotonie de f' ou le signe de f'' permet alors de conclure plus facilement sur la convexité ou la concavité de f.
- La définition et les caractérisations de la convexité sont alors utilisées comme conséquences de celle-ci. Y penser pour les résultats plus théoriques en particulier.
- Parfois, le plus difficile est de reconnaître une inégalité de convexité. Penser par exemple à utiliser ln si l'inégalité se présente sous forme de produit.

Exercices vus en cours

1 Soit A, B, C trois points du plan $\mathbb{R}^2$. Déterminer la position de $G = \mathrm{bar}\big((\mathrm{A},\alpha),(\mathrm{B},\beta),(\mathrm{C},\gamma)\big)$ où $\alpha+\beta+\gamma=1$ en fonction su signe de α, β et γ.

2 Montrer qu'une fonction convexe sur I est admet en chaque point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que f est continue sur $\mathring{I}$. Est-ce le cas sur I ?

3 Étudier la convexité de exp, ln, $t \mapsto t^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sin, tan, ζ, Γ.

4 Montrer les inégalités suivantes

1. **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_*^+$,
$$\sqrt[n]{x_1\cdot\dots\cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_n}{n}.$$
Qu'obtient-on en remplaçant x_i par $\dfrac{1}{x_i}$?
2. $\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.
4. $\forall\, x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

Barycentres, parties convexes

5 **Enveloppe convexe**

L'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel réel E est le plus petit convexe contenant A.
Comment l'exprimer à l'aide d'une intersection ?
Comment décrire ses éléments à l'aide de barycentres ?

6 **Points extrémaux** Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dit qu'un point x de C est extrémal lorsque :
$$\forall (a,b) \in C^2 \qquad x \in [a,b] \Longrightarrow \big(x = a \quad \text{ou} \quad x = b\big)$$
Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe ayant n points extrémaux, $n \geqslant 2$.
Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe borné non vide n'ayant aucun point extrémal.
Existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$ des parties qui ont un unique point extrémal ?

7 Montrer que dans un evn, l'intérieur et l'adhérence d'un convexe sont convexes.

8 **Théorème de Gauss-Lucas**

Soit P un polynôme de degré au moins 2 de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P' se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire sont des barycentres à cœfficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à $\dfrac{P'}{P}$.

Fonctions convexes

9 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, f et g ont même monotonie et f et g sont convexes sur I. Montrer que fg est convexe sur I.

10
1. Montrer que la composée (à gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.
2. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ dont la composée avec ln (à gauche) est convexe (on parle de fonction log-convexe) est une fonction convexe.

11 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe. Étudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

12 **Inégalité de Bernoulli** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geqslant 0,\ x^{n+1} - (n+1)\,x + n \geqslant 0$.

13 Montrer que $\forall (x,y) \in\,]1,+\infty[^2$ on a : $\ln \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$.

14 Soit f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' \leqslant 1$. Montrer que $f(0) - 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f(1) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

15 Montrer que parmi les polygones inscrits dans un cercle donné, les polygones réguliers ont un périmètre maximal.

16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante. *(On pourra raisonner par l'absurde.)* Le résultat est-il vrai si f définie sur $\mathbb{R}^+$?

17 Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ convexe, croissante, non constante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

18 **Inégalité de Jensen continue** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a < b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi(x) \geqslant \phi(\gamma) \;+\; (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

19 **Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{C}^n$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in]1,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Soient $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{C}^n$. On note $\alpha = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$ et $\beta = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}$.

1. Montrer que si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $xy \leqslant \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{\alpha\beta}\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \dfrac{1}{p\alpha^p}\sum_{k=1}^n |x_k|^p + \dfrac{1}{q\beta^q}\sum_{k=1}^n |y_k|^q$.
3. En déduire l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{C}^n$:

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Quelle inégalité classique retrouve-t-on en particulier ?

4. En remarquant que $\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1}$, en déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

5. Montrer que $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x_k|^p}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
6. Calculer la limite de $\|x\|_p$ lorsque $p \to +\infty$.

Remarque : On peut faire le même travail et obtenir des résultats similaires avec des intégrales de fonctions continues sur un segment $[a,b]$.

20 Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

21 **Fonctions mid-convexes**

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x,y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.
(On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x,y) = \Big\{t \in [0,1] \mid f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)\Big\}$$

contient tous les $\dfrac{k}{2^n}$*...)*

22 Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I, alors f' est continue sur I.

(On pourra appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ et utiliser le fait qu'une fonction croissante a des limites à gauche et à droite.)

23 Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite ou $+\infty$ en $+\infty$.
2. Montrer que si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ en $+\infty$.