

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

Exercices vus en cours

1 Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

2 Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable.

1. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .

2. On suppose que f a une limite (finie) en $+\infty$.

Montrer que $x\mathcal{L}(f)(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

3. Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

(a) Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

(b) On définit, si $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$. Calculer la limite de F en $+\infty$.

(c) Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

(d) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et calculer F' .

(e) En déduire I .

3 CCINP 50 On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Solution de 3 : CCINP 50

1. Notons $f : \begin{cases}]0; +\infty[\times]0; +\infty[& \mapsto \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto \frac{e^{-2t}}{x+t} \end{cases}$

(a) $\forall x \in]0; +\infty[, t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

(b) $\forall t \in]0; +\infty[, x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-2t}}{x+t}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

(c) Soit $[a, b]$ un segment de $]0; +\infty[$.

$\forall x \in [a, b], \forall t \in]0; +\infty[, |f(x, t)| \leq \frac{1}{a} e^{-2t}$ et $\varphi : t \mapsto \frac{1}{a} e^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0; +\infty[$.

En effet, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0$, donc $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc sur $[0; +\infty[$.

On en déduit que, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

$$2. \forall x \in]0; +\infty[, xF(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t} e^{-2t} dt.$$

Posons $\forall x \in]0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[, h_x(t) = \frac{x}{x+t} e^{-2t}$.

i) $\forall x \in]0; +\infty[, t \mapsto h_x(t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

ii) $\forall t \in [0; +\infty[, \lim_{x \rightarrow +\infty} h_x(t) = e^{-2t}$.

La fonction $h : t \mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.

iii) $\forall x \in]0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[, |h_x(t)| \leq e^{-2t}$ et $t \mapsto e^{-2t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0; +\infty[$.

Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à $(h_x)_{x \in]0; +\infty[}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_x(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = \frac{1}{2}$.

$$3. \text{D'après 2.}, \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = \frac{1}{2}, \text{ donc } F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Autre méthode : le CV $u = x + t$ donne $F(x) = e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} du$ ce qui redonne existence et continuité.

Puis, la dérivée de $u \mapsto \frac{e^{-2u}}{u}$ valant $u \mapsto -\frac{2u+1}{u^2} e^{-2u}$, on « remarque » que $\frac{e^{-2u}}{u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u}$, donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence,

$$F(x) \sim e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u} du = e^{2x} \left[-\frac{e^{-2u}}{2u} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

D'où en particulier $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

4 CCINP 30

- Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
- Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
- (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Solution de 4 : CCINP 30

- Voir ci-dessus.
- On pose $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$.
i) $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto u(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x, t)| \leq e^{-t^2}$.
Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Donc, $t \mapsto u(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

ii) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -te^{-t^2} \sin(xt)$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

- $\forall t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

-iii) $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \varphi(t)$ avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$.

En effet, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On en déduit que φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et comme elle est continue sur $[0, 1[$, alors φ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$.

Donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$$

3. (a) On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$.

Procédons à une intégration par parties. Soit $A \geq 0$.

$$\int_0^A -te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^A - \int_0^A \frac{x}{2} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

En passant à la limite quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient $f'(x) + \frac{x}{2} f(x) = 0$.

Donc f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{x}{2} y = 0$.

(b) Les solutions de (E) sont les fonctions y définies par $y(x) = Ae^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

5 La fonction Γ On définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de Γ .
- Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
- Montrer que Γ est continue sur son ensemble de définition.
- Montrer que Γ est même de classe \mathcal{C}^∞ et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.
- Montrer que $\Gamma'' \geq 0$. Cela permet de montrer que Γ est une fonction convexe.
- Montrer que Γ' s'annule en un $x_0 \in]1, 2[$ et nulle part ailleurs.
On trouve numériquement que $x_0 \approx 0,89$ et $\Gamma(x_0) \approx 1,46$.
- Montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et en déduire sa limite.
- Déterminer la limite en $+\infty$ de Γ .
- Tracer son graphe.

Solution de 5 : La fonction Γ

- En effet, la fonction $f_x : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, positive (utile pour avoir le droit d'utiliser des équivalents).
 - Intégrabilité sur $[1, +\infty[$: par croissances comparées, $e^{-t} t^{x-1} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann. Ici, pas de condition sur x .
 - Intégrabilité sur $]0, 1]$: $e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $x-1 > -1$, i.e. $x > 0$.
- Par intégration par parties, si $0 < a < A$,

$$\int_a^A e^{-t} t^{x-1} dt = \left[e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_{t=a}^{t=A} + \frac{1}{x} \int_a^A e^{-t} t^x dt \quad (1)$$

Mais, par croissances comparées,

$$e^{-A} \frac{A^x}{x} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

et de plus

$$e^{-a} \frac{a^x}{x} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

On en déduit, en prenant les limites quand $a \rightarrow 0$ et $A \rightarrow +\infty$ dans (1),

$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, pour tout $n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

- On définit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ \times]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto e^{-t} t^{x-1} \end{cases}$$

Et on constate facilement que

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_*^+ .

Domination La domination, pour la continuité de Γ , est à la fois un peu technique et très importante. Soit $K = [a, b]$, $0 < a < b$. On a

$$\forall (x, t) \in K \times]0, +\infty[\quad 0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq \begin{cases} e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \leq \\ e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > \end{cases}$$

Rien n'empêche une fonction « dominante » d'être définie par morceaux. Si on n'aime pas, on peut aussi bien dire :

$$\forall (x, t) \in K \times]0, +\infty[\quad e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1})$$

4. On reprend

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ \times]0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto e^{-t} t^{x-1} \end{cases}$$

Et on constate facilement que f est indéfiniment dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, avec pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} : (x, t) \longmapsto$$

En théorie, on peut ne dominer que la dernière dérivée partielle... mais il n'y en a pas ! On domine donc toutes les dérivées partielles.

Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque.

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue (continue par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_*^+ .

Domination : Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $K = [a, b]$, $0 < a < b$. On a

$$\forall (x, t) \in K \times]0, +\infty[\quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \begin{cases} e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \leq \\ e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > \end{cases}$$

(il faut bien sûr s'assurer que la fonction dominante est intégrable).

5. Facile.
6. Théorème de Rolle, puis croissance de Γ' .
7. $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$.
8. La limite existe par monotonie et $\Gamma(n) = (n-1)! \rightarrow +\infty$.

6 CCINP 29 On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[,$ exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Solution de 6 : CCINP 29

1. Soit $x \in]0, +\infty[$.

La fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est définie, positive et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ et $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (fonction de Riemann avec $1 - x < 1$).

Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$. (*)

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(x, t) = 0$, donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $f(x, t) = o(\frac{1}{t^2})$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**)

Donc, d'après (*) et (**), $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Par intégration par parties $\int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_{\varepsilon}^A + x \int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^{x-1} dt$.

On passe ensuite à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $A \rightarrow +\infty$ et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

C'est-à-dire $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. i) pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après la question 1.).

ii) $\forall t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable et $\forall (x, t) \in]0, +\infty[^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t) e^{-t} t^{x-1}$.

iii) Pour tout $x > 0$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

iv) Pour tout $t > 0$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

v) Pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et $\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times [a, b]$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi(t) = \begin{cases} |\ln t| e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ |\ln t| e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

En effet :

$$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln t| t^{a-1} = \varphi_1(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-\frac{a}{2}} \varphi_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{a}{2}} |\ln t| = 0.$$

$$\text{Donc, au voisinage de } 0^+, \varphi_1(t) = o\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right).$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (fonction de Riemann avec $1 - \frac{a}{2} < 1$).

Donc, φ_1 est intégrable sur $]0, 1[$.

Donc, par critère d'équivalence pour les fonctions positives, φ est intégrable sur $]0, 1[$. (*)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0.$$

Donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o(\frac{1}{t^2})$.

Or, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de Riemann intégrable).

Donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$. (**)

D'après (*) et (**), φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, Γ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} dt$.

Autres exercices

7 Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$. Étudier la définition de f , sa dérivabilité, puis la calculer.

Solution de 7 :

On trouve le domaine de définition : $] -1, +\infty[$. Sur lequel f est de classe C^1 (domination sur tout segment).
Et on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On primitive, en remarquant que f a pour limite 0 en $+\infty$ (théorème de convergence dominée),

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$

8 Existence et calcul éventuel de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} dt$.

Solution de 8 :

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_*^+ , prolongeable par continuité en 0 (elle a pour limite x en 0), seul se pose donc le problème de l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$. Mais on a, par croissances comparées,

$$e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right)$$

donc, sin étant bornée,

$$\left| \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} \right| = \underset{t \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve par comparaison à l'exemple de Riemann l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ et, par suite, sur $]0, +\infty[$.
L'intégrale est bien définie.

Définissons maintenant

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \times]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} \end{cases}$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h(x, \cdot) : t \mapsto h(x, t)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude de l'existence de l'intégrale).

• h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = e^{-t} \cos(xt)$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, intégrable sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous mais on peut le voir rapidement : pas de problème en 0, et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).

• Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $\frac{\partial h}{\partial x}(\cdot, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

• **Domination** : On a alors

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$$

et $\phi : t \mapsto e^{-t}$ est indépendante de x , continue (*par morceaux* suffirait), intégrable sur $]0, +\infty[$ par comparaison à l'exemple de Riemann (pas de problème en 0, et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe \int , on conclut :

l'application $\phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$$

on calcule facilement en interprétant comme partie réelle d'une intégrale facile à calculer, puis on primitive, et on utilise $\phi(0) = 0$.

9 Oral Centrale Définition, continuité et dérivabilités successives de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

Solution de 9 : Oral Centrale

Le domaine de définition est \mathbb{R}_*^+ . Le changement de variable $u = x + t$, $t = u - x$ permet de sortir x de l'intégrale. D'où assez facilement la classe C^∞ .

10 Calcul de l'intégrale de Gauß

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Démontrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

11 Oral Mines

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{x^2 + t^2} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Étudier sa continuité.

3. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

4. Déterminer les limites, puis des équivalents en 0 et en $+\infty$ de f .

Solution de 11 : Oral Mines

La fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{x^2 + t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 en lui donnant en général la valeur 0, sauf si $x = 0$ (valeur $1/2$). Comme elle est $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ pour $t \rightarrow +\infty$, la comparaison avec les fonctions de Riemann donne l'intégrabilité. On définit sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ la fonction h par

$$h(x, t) = \frac{1 - \cos t}{x^2 + t^2}$$

est continue, et la domination

$$|h(x, t)| \leq \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

montre bien la continuité. Pour la classe C^1 , h est dérivable par rapport à x , et pour tous $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-2x(1 - \cos t)}{(x^2 + t^2)^2}$$

est continue par rapport à chacune de ses variables, la domination

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[\quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b(1 - \cos t)}{(a^2 + t^2)^2}$$

(où $0 < a < b$) montre la classe C^1 sur \mathbb{R}_*^+ . Donc sur \mathbb{R}_* par parité. Il est possible de montrer que f n'est pas C^1 en montrant que f' a une limite infinie en 0. C'est un peu technique.

La limite en $+\infty$ est nulle (convergence dominée). La limite en 0 est

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

(théorème de convergence dominée ou continuité). Et est donc un équivalent, car elle est non nulle. La recherche d'un équivalent en $+\infty$ est plus délicate. On essaye de « faire sortir » de l'intégrale quelque chose qui tend vers 0, en effectuant une intégration par parties ou un changement de variable. Le changement de variable le plus naturel serait $t = xu$ qui ferait sortir un $1/x$:

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1 + u^2} du \right)$$

et une intégration par parties de l'intégrale figurant dans cette expression donne l'équivalent $\frac{\pi}{2x}$.

12 **Oral Mines** Calculer $f(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 - iux} dx$ pour $u \in \mathbb{R}$.

On admet la valeur de l'intégrale de Gauss : $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (voir exercice 10.)

Solution de 12 : Oral Mines

On étudie cette intégrale comme fonction de u :

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - iux} dx$$

On voit qu'elle est C^1 assez facilement (c'est une transformée de Fourier, les dominations sont donc faciles). Par intégration par parties, on trouve une relation entre $f'(u)$ et $f(u)$: en effet, si on a bien trouvé

$$f'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ix e^{-x^2 - iux} dx$$

on peut se servir du x pour intégrer par parties, en primitivant $x e^{-x^2}$ et en dérivant e^{-iux} :

$$f'(u) = -i \left(\left[\frac{-1}{2} e^{-x^2} e^{-iux} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2} e^{-x^2} (-iu) e^{-iux} du \right)$$

ce qui donne

$$f'(u) = -\frac{u}{2} f(u)$$

On en déduit l'existence d'une constante K telle que

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f(u) = K \exp(-u^2/4)$$

Mais on « sait » :

$$K = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

13 **Oral Centrale** Calculer, pour x réel, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$

(on étudiera la classe de f , et on essaiera de la dériver deux fois sur un intervalle).

Solution de 13 : Oral Centrale

Il est prudent de commencer par étudier l'existence, qui ne pose pas trop de problèmes. On montre ensuite que f est de classe C^2 (domination facile). Sa dérivée seconde se calcule sans grande difficulté : on trouve

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Mais $f(0) = f'(0) = 0$, une double primitivation donne alors

$$f(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

14 **Oral Centrale; Mines** Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

1. Domaine de définition ?
2. La fonction f est-elle de classe C^1 ?
3. Calculer la dérivée de f , puis f .
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\right)^2 dt$.

Solution de 14 : Oral Centrale; Mines

Le domaine de définition est \mathbb{R} , la fonction $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ se prolongeant par continuité à $[0, +\infty[$ et étant $\mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^3}\right)$, or $3 > 1 \dots$ Définissons, sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$,

$$h : (x, t) \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

qui constitue une domination irréprochable. On ne s'attarde pas sur les hypothèses autres que la domination, elles sont faciles à vérifier. On aboutit au fait que f est C^1 sur \mathbb{R} , sa dérivée valant en tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} dt$$

que l'on calcule en décomposant en éléments simples, supposant $x \notin \{-1, 0, 1\}$. On cherche a, b, c, d tels que

$$\frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} = \frac{at+b}{1+x^2 t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

La parité nous montre d'abord que $a = c = 0$. On réduit au même dénominateur, on voit que $b + d = 1$ et $b + dx^2 = 0$, d'où les valeurs de b et d et la décomposition

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{x^2-1} \frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1} \frac{1}{1+t^2}$$

Il faut alors éviter de se tromper avec le signe de x ... supposons donc $x > 0$ et $x \neq 1$ dorénavant. Alors

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

Cette valeur est encore valable pour $x = 1$ car f' est continue. Compte tenu de $f(0) = 0$ on obtient

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1)$$

et pour $x < 0$, par imparité, on trouve $-f(-x)$... L'intégrale demandée se calcule par parties pour se ramener à $f(1)$.

15 Injectivité de la transformation de Laplace

Soit f une application continue $[0, +\infty[$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif x_0 vérifiant $e^{-x_0 t} f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

1. Démontrer que, si $x > x_0$, l'application $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $]x_0, +\infty[$.

On note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie sur $]x_0, +\infty[$ par $\mathcal{L}(f) : s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$.

2. Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]x_0, +\infty[$.

3. On suppose que $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $\int_0^{+\infty} e^{-nt-(x_0+1)t} f(t) dt = 0$.

(b) Soit alors g définie sur $]0, 1]$ par $g(u) = u^{x_0} f(-\ln u)$.

Démontrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$, et que pour tout entier naturel n ,

$$\int_0^1 u^n g(u) du = 0.$$

(c) En déduire que g , et donc f , est la fonction nulle.

Classique : utiliser le théorème de Weierstrass.

16 Convolution « temporelle »

Soit f et g deux applications continues sur \mathbb{R}^+ . On définit leur produit de convolution :

$$f \star g = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

Démontrer que $f \star g$ est continue sur \mathbb{R}^+ , et que $f \star g = g \star f$.

Indication : commencer par un changement de variable pour se ramener à une intégrale sur le segment $[0, 1]$.

Solution de 16 : Convolution « temporelle »

Aucun problème de définition ; le changement de variable $t = x - u$, $u = x - t$ donne la commutativité. Pour la continuité, comme la variable figure à la fois dans une borne et à l'intérieur de l'intégrale, comme il n'est pas possible de la faire sortir de l'intégrale, on la fait au contraire rentrer en effectuant le changement de variable $t = xu$, qui donne

$$(f \star g)(x) = x \int_0^1 f(xu)g(x(1-u))du$$

Ensuite, le théorème de continuité sous le signe \int , avec une domination sur tout segment (on ne peut pas faire mieux) : si K est un segment inclus dans \mathbb{R}^+ , soit $M \geq 0$ tel que $K \subset [0, M]$; en définissant h sur $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]$ par

$$h(x, t) = f(xu)g(x(1-u))$$

on a

$$\forall (x, t) \in K \times [0, 1] \quad |h(x, t)| \leq N_\infty(f|_{[0, M]})N_\infty(g|_{[0, M]})$$

qui constitue une domination valable, une fonction constante étant intégrable sur $[0, 1]$.

17 Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet

On pose, pour $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$.

- Vérifier que ces deux intégrales sont bien définies.
- Écrire $g(x)$ sous la forme $\phi(x) \cos x + \psi(x) \sin x$, où $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux intégrales sur l'intervalle $[x, +\infty[$.
- Étudier la continuité de f et de g .
- Démontrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et sont toutes les deux solutions de $y'' + y = \frac{1}{x}$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Solution de 17 : Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet

- On trouve

$$g(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

- On a vu que f et g étaient continues sur $[0, +\infty[$.

Montrons que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}_*^+ :

Pour cela, on définit

$$h : \mathbb{R}_*^+ \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}(x, t) \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction $h(x, \cdot) : t \mapsto h(x, t)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude du domaine de définition de f).
- h est deux fois dérivable (davantage, même!) par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_*^+ \times]0, +\infty[\quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, les fonctions $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, intégrables sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous).

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, les fonctions $\frac{\partial h}{\partial x}(\cdot, t)$ et $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\cdot, t)$ sont continues sur \mathbb{R}_*^+ .

- Domination :** Soit a, b tels que $0 < a < b$ et $S \subset [a, b]$. Si $k = 1$ ou $k = 2$, on peut majorer :

$$\forall (x, t) \in S \times]0, +\infty[\quad \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$$

et $\phi_S : t \mapsto \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$ est indépendante de x , continue (par morceaux suffirait), intégrable sur $]0, +\infty[$ par comparaison à l'exemple de Riemann (en effet, par croissances comparées, $\frac{t e^{-at}}{1+t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$).

En appliquant deux fois le théorème de dérivation sous le signe \int , on conclut :
 f est de classe C^2 sur \mathbb{R}_*^+ , et

$$\forall x > 0 \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

d'où l'on tire facilement $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$.

Montrons que g est de classe C^2 sur \mathbb{R}_*^+ :

On a vu que l'on pouvait écrire, sur \mathbb{R}_*^+ ,

$$g(x) = \phi(x) \cos x + \psi(x) \sin x$$

où ϕ et ψ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_*^+ , de dérivées $\phi'(x) = -\frac{\sin x}{x}$ et $\psi'(x) = \frac{\cos x}{x}$. Donc g est C^1 sur \mathbb{R}_*^+ , et, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \cos x \phi'(x) - \sin x \phi(x) + \cos x \psi'(x) + \sin x \psi(x) = -\sin x \phi(x) + \cos x \psi(x)$$

ce qui permet de dire que g' est de classe C^1 , donc g de classe C^2 sur \mathbb{R}_*^+ , et, pour tout $x > 0$,

$$g''(x) = -\sin x \phi'(x) - \cos x \phi(x) + \cos x \psi'(x) - \sin x \psi(x) = \frac{1}{x} - g(x)$$

d'où découle le résultat.

5. La fonction $f - g$ est solution sur \mathbb{R}_*^+ de l'équation $y'' + y = 0$, elle est donc de la forme $t \mapsto a \cos t + b \sin t$ ou $t \mapsto A \cos(t + \phi)$. Mais on remarque que f a pour limite 0 en $+\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite et théorème de convergence dominée, ou par simple majoration :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

et de même, comme ϕ et ψ ont des limites nulles en $+\infty$, c'est aussi le cas de g . Donc $A = 0$ (on peut aussi dire qu'une fonction périodique ayant une limite en $+\infty$ est constante), donc $f = g$ sur \mathbb{R}_*^+ . Par continuité en 0, $f(0) = g(0)$, et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

18

Démontrer la formule suivante, pour $x > 1$,

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$$

Faire apparaître dans l'intégrale du second membre des termes qui rappellent $\Gamma(x)$ et une série géométrique, et conclure.

