

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

- On parle d'intégrale dépendant d'un paramètre, pour distinguer la « variable d'étude » ($x...$), appelée aussi paramètre, de la variable d'intégration ($t...$).
- Devant la question « calculer $\int_a^b f(x, t) dt$ », on n'aura plus le seul réflexe de chercher à se ramener, par intégrations par parties et changements de variables préalables, à des calculs de primitives. On pourra aussi envisager $\int_a^b f(x, t) dt$ comme fonction de x , voir si les théorèmes du cours permettent de la dériver, calculer sa dérivée, ou obtenir une relation entre ses dérivées successives... et en déduire la valeur de l'intégrale cherchée.
- **Si Le paramètre n'intervient pas dans les bornes de I .**

*** Bien poser le problème :**

C'est important, la suite en dépend. La première phrase aura en général la forme suivante (approximativement) :

La fonction $f : (x, t) \mapsto \dots$ est définie sur $A \times I$.

La détermination de l'intervalle I est primordiale; en effet, I n'est pas nécessairement donné par l'énoncé, qui demande souvent d'étudier une fonction donnée sous la forme $x \mapsto \int_a^b \dots$

On ne sait pas alors, dans le cas où a et/ou b est finie, si elle est dans I ou pas. En ce qui concerne A , l'énoncé peut le donner explicitement (« montrer que la fonction est de classe C^k sur A ... »); on peut aussi avoir à le déterminer comme ensemble des valeurs de x pour lesquelles $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I .

Il est important enfin de donner un nom (f, g, \dots) à la fonction étudiée.

- * **Si I est un segment :** La domination ne pose pas de problème, il suffit de dire qu'une fonction continue sur un segment est bornée, et qu'une fonction constante est intégrable sur un segment.
- * **Si I n'est pas un segment :** Il ne faut alors pas oublier de dominer... la rédaction de la question doit montrer que l'on a bien compris ce que signifie dominer : on doit majorer en module par une fonction intégrable sur I et qui ne dépend pas de la variable x (appelée « paramètre »). On est très souvent amené à dominer sur tout segment inclus dans A (x est astreint à rester dans un segment B inclus dans A). Ne pas confondre x et t (d'où l'importance des notations)!

• Le paramètre n'intervient que dans les bornes de I

On doit donc étudier une fonction du type $g : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ où f est continue sur J et u et v sont à valeurs dans J . Soit alors F une primitive de f sur J . On écrit $g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$ ce qui permet d'étudier g (par exemple de la dériver, si u et v sont dérivables et f continue).

Mais ce n'est pas la seule méthode! on peut en effet rentrer x dans l'intégrale par un changement de variable; par exemple, $g(x) = (v(x) - u(x)) \int_0^1 f(u(x) + s(v(x) - u(x))) ds$.

On est alors ramené au cas précédent, sur un segment.

• Le paramètre est à la fois dans les bornes de I et à l'intérieur de l'intégrale.

Le changement de variable du type précédent permet alors de se ramener à des bornes indépendantes du paramètre. On peut aussi utiliser la remarque suivante : soit à étudier $g : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$

On définit alors la fonction de trois variables définie sur un domaine à déterminer : $h : (u, v, x) \mapsto \int_u^v f(x, t) dt$.

On calcule les dérivées partielles, et on utilise des techniques sur les fonctions de plusieurs variables : $g(x) = h(u(x), v(x), x)$

- Lorsque l'on doit montrer qu'une fonction $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe C^1 , on doit dominer $\frac{\partial f}{\partial x}$, mais pas f .

Exercices vus en cours

1 Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

2 Transformée de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable.

1. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est définie et continue sur \mathbb{R}^+ .

2. On suppose que f a une limite (finie) en $+\infty$.

Montrer que $x\mathcal{L}(f)(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

3. Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

(a) Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

(b) On définit, si $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$. Calculer la limite de F en $+\infty$.

(c) Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

(d) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer F' .

(e) En déduire I .

3 CCINP 50 On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.

2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

4 CCINP 30

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

(b) Résoudre (E).

5 **La fonction Γ** On définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de Γ .
- Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
- Montrer que Γ est continue sur son ensemble de définition.
- Montrer que Γ est même de classe \mathcal{C}^∞ et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.
- Montrer que $\Gamma'' \geq 0$. Cela permet de montrer que Γ est une fonction convexe.
- Montrer que Γ' s'annule en un $x_0 \in]1, 2[$ et nulle part ailleurs.
On trouve numériquement que $x_0 \approx 0,89$ et $\Gamma(x_0) \approx 1,46$.
- Montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et en déduire sa limite.
- Déterminer la limite en $+\infty$ de Γ .
- Tracer son graphe.

6 **CCINP 29** On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

- Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
- Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Autres exercices

7 Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$. Étudier la définition de f , sa dérivabilité, puis la calculer.

8 Existence et calcul éventuel de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} dt$.

9 **Oral Centrale** Définition, continuité et dérivabilités successives de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

10 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

- Démontrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

11 **Oral Mines**

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{x^2 + t^2} dt$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Étudier sa continuité.
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
- Déterminer les limites, puis des équivalents en 0 et en $+\infty$ de f .

12 **Oral Mines** Calculer $f(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 - iux} dx$ pour $u \in \mathbb{R}$.

On admet la valeur de l'intégrale de Gauss : $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (voir exercice 10).

13 **Oral Centrale** Calculer, pour x réel, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$

(on étudiera la classe de f , et on essaiera de la dériver deux fois sur un intervalle).

14 **Oral Centrale ; Mines** Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

- Domaine de définition ?
- La fonction f est-elle de classe C^1 ?
- Calculer la dérivée de f , puis f .
- Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan } t}{t} \right)^2 dt$.

15 **Injectivité de la transformation de Laplace**

Soit f une application continue $]0, +\infty[$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif x_0 vérifiant $e^{-x_0 t} f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

- Démontrer que, si $x > x_0$, l'application $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $]x_0, +\infty[$.

On note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie sur $]x_0, +\infty[$ par $\mathcal{L}(f) : s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$.

- Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]x_0, +\infty[$.
- On suppose que $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $\int_0^{+\infty} e^{-nt - (x_0+1)t} f(t) dt = 0$.

(b) Soit alors g définie sur $]0, 1[$ par $g(u) = u^{x_0} f(-\ln u)$.

Démontrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$, et que pour tout entier naturel n , $\int_0^1 u^n g(u) du = 0$.

(c) En déduire que g , et donc f , est la fonction nulle.

Classique : utiliser le théorème de Weierstrass.

16 Convolution « temporelle »

Soit f et g deux applications continues sur \mathbb{R}^+ . On définit leur produit de convolution :

$$f \star g = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

Démontrer que $f \star g$ est continue sur \mathbb{R}^+ , et que $f \star g = g \star f$.

Indication : commencer par un changement de variable pour se ramener à une intégrale sur le segment $[0, 1]$.

17 Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet

On pose, pour $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$.

1. Vérifier que ces deux intégrales sont bien définies.
2. Écrire $g(x)$ sous la forme $\phi(x) \cos x + \psi(x) \sin x$, où $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux intégrales sur l'intervalle $[x, +\infty[$.
3. Étudier la continuité de f et de g .
4. Démontrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et sont toutes les deux solutions de $y'' + y = \frac{1}{x}$.
5. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

18 Démontrer la formule suivante, pour $x > 1$,

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$$

Faire apparaître dans l'intégrale du second membre des termes qui appellent $\Gamma(x)$ et une série géométrique, et conclure.