

LIMITES ET INTÉGRALES

• Suites d'intégrales

On dispose principalement de deux résultats :

- * *La convergence uniforme* : demande d'être sur un segment, fonctions continues et surtout la convergence uniforme elle-même, pas toujours facile à montrer.
- * *La convergence dominée* : plus simple car, justement, une convergence simple suffit. Sur un intervalle quelconque, y compris un segment, l'hypothèse de domination, à connaître parfaitement, garantit l'intégrabilité.

Si aucun des résultats ne s'applique, c'est plus compliqué. On passe par des techniques standards comme les changements de variables, l'intégration par partie (prudente, sur un intervalle quelconque), le découpage d'intégrale...

- * Le découpage d'intégrale s'effectue par relation de Chasles en essayant de visualiser où l'intégrale se concentre lorsque n grandit. Il faut en général sortir les ε & co. et ce n'est pas toujours simple à rédiger (type Césaro...)
- * Pour des recherches d'équivalent, on effectue souvent un changement de variable pour sortir le n de sous l'intégrale, qui peut être suivi d'une application du théorème de convergence dominée.
- * Si n apparaît également dans les bornes de l'intégrale, on s'en débarrasse soit par un changement de variable, soit en faisant apparaître sous l'intégrale une fonction indicatrice $\mathbb{1}_I$ pour se ramener à un intervalle fixe. Cependant, si n apparaît seulement dans les bornes, on conclut directement, avec des résultats d'intégrabilité ou de continuité par exemple.
- * Des calculs de limites de fonctions $f : x \mapsto \int_a^b \phi(x, t) dt$ peuvent se faire via les outils sur les suites : il suffit de passer par la caractérisation séquentielle.

• Interversion séries intégrales

Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

- * Le théorème avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$.
- * Si $I = [a, b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément. Le plus agréable serait qu'elle converge normalement, donc que $\sum N_\infty(f_n)$ converge. En fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leq |b-a|N_\infty$, le premier théorème s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.

- * Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique. Posant alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on écrit, pour tout $n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ et $S = S_n + R_n$ avec des notations habituelles : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_a^b R_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est fini.

On peut aussi envisager d'appliquer le théorème de convergence dominée directement à

$$\int_a^b S_n(t) dt.$$

1. Limites de suites d'intégrales

1 Wallis Démontrer que la suite de terme général $\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$ converge, donner sa limite en appliquant un théorème puis en effectuant un découpage.

2 Utilité de l'hypothèse de domination

Définissons, sur $[0, 1]$, f_n continue affine par morceaux nulle en 0 et sur $\left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$, et prenant en $\frac{1}{n+1}$ la valeur $n+1$.

Étudier la convergence simple de (f_n) et la convergence de $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

3 CCINP 25

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n) .

4 CCINP 26

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

5 CCINP 27

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6 Calcul de limite d'une transformée de Laplace

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ a une limite quand $x \rightarrow +\infty$; la calculer.

7 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x > 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$. Montrer que $x F(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

8 Utilisation pour le calcul d'une intégrale semi-convergente

Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

On définit, si $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$.

Calculer la limite de F en $+\infty$.

Puis montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction $g: x \rightarrow \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ et l'exercice précédent.

9 CCINP 50 On considère la fonction $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

10 On pose $I_n = \int_0^1 \frac{du}{1+u^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite (I_n) converge vers une limite ℓ , et trouver un équivalent de $I_n - \ell$.

11 Soit f réelle continue sur $[0, 1]$. Montrer que la suite de terme général $n \int_0^1 t^n f(t) dt$ admet pour limite $f(1)$.

12 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt} dt$ où f est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$.

13 Soit f continue sur $[0, 1]$.

1. Déterminer la limite ℓ quand n tend vers l'infini de $\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t} dt$
2. On suppose f dérivable en 0 telle que $\int_0^1 \frac{f(u) - f(0)}{u} du \neq 0$.
Déterminer un équivalent de $\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t} dt - \ell$

14 Oral Mines-Centrale Soit f continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles. Étudier la convergence de la suite de terme général $\int_0^1 f(t^n) dt$.

15 Oral Mines Étudier la limite de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \exp(-t^n) dt$.

16 Trouver un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}} dt$.

17 Pour tout entier naturel non nul n , on définit $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x dx$.

Démontrer que la suite (I_n) converge vers une limite que l'on exprimera sous forme intégrale.

18 Oral CCINP Soit $[\alpha, \beta]$ un segment réel; soient (a_n) et (b_n) des suites telles que, pour tout n , $\alpha \leq a_n \leq b_n \leq \beta$ et (a_n) tend vers α , (b_n) tend vers β . Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues sur $[\alpha, \beta]$ convergeant uniformément vers une certaine fonction f .

1. Étudier la convergence de la suite de terme général $\int_{a_n}^{b_n} f_n(t) dt$.
2. Soit $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que la suite de terme général $n \int_1^{1+1/n} g(t^n) dt$ converge vers $\int_1^e \frac{g(s)}{s} ds$.

2. Interversions séries-intégrales

19 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

20 On suppose que (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum |a_n|$ converge. On définit, sur \mathbb{R} , $f: t \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$.

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t) dt = a_m$.

21 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

22 CCINP 19

1. Prouver que, pour tout entier naturel n , $f_n: t \mapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$.
2. Prouver que $f: t \mapsto e^t \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que $\int_0^1 e^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nm!}$.

23 CCINP 49

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
- (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

- (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

24 Montrer, en utilisant des séries géométriques, que

$$1. \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1+t^2} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}. \quad 2. \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}. \quad 3. \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

25 Oral Mines Soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t^2-1} dt$. Calculer la limite de I_n , puis celle de nI_n en faisant apparaître une série géométrique. En déduire un équivalent de I_n .**26** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2-1}$.

1. Montrer que f_n est intégrable sur $]0, 1[$.

On note $J_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

2. Déterminer la limite de $(J_n)_n$.
3. Montrer que $J_n = \frac{1}{4} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

27 1. Pour $a > 0$ et $b > 0$, montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.