Séries de fonctions

1. Exercices vus en cours

1 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$

2 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

3 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\sum n^\alpha x \mathrm{e}^{-n^2x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Dans le cas contraire, préciser sur quels types d'intervalles il y a convergence normale.

4 Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

5 A-t-on convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x\mathrm{e}^{-n^2x^2}$?

6 Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer la limite en $+\infty$ de f.

7 Soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et calculer de $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que la série convergence normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que la conclusion du théorème de la double-limite ne tient pas en 0^+.

8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

9 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On note f la somme de la série.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer f'.
3. Étudier les variations de f.

2. Exercices CCINP

$\boxed{10}$ CCINP 8

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Solution de 10 : CCINP 8

1. (a) $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$, donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   De même $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geqslant 0$, donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$.
   On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc elles convergent et ce vers une même limite.
   Comme $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrent l'ensemble des termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.
   Ce qui signifie que la série $\sum (-1)^k u_k$ converge.

   (b) Le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.
2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.
   Si $x \geqslant 0$, alors $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
   Donc d'après 1.(a), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   Remarque : pour $x > 0$, on a aussi convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

   En effet, pour tout réel $x > 0$, $n^2|f_n(x)| = n\mathrm{e}^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|f_n(x)| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   (b) Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$, on peut poser $\forall x \in [0,+\infty[$, $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
   Alors, comme, $\forall x \in [0,+\infty[$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit,

d'après 1.(b), que :

$\forall x \in [0,+\infty[,\ |R_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$.

Et donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ |R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

C'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

11 CCINP 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Solution de 11 : CCINP 14

1. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$.
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est continue sur le segment $[a,b]$.
   On pose alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f_n(x) - f(x)\right|$.
   On a $\left|\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty$. (*)
   Or (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
   Donc d'après (*), $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.
   On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, donc converge simplement sur $[a,b]$.
   On pose alors, également, $\forall x \in [a,b]$, $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ signifie que (S_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers S.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[a,b]$, car S_n est une somme finie de fonctions continues.
   On en déduit que S est continue sur $[a,b]$.
   Et d'après 1., $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.
   Or $\displaystyle\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$ car il s'agit d'une somme finie.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.
   Ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Ce qui signifie que $\sum \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Bilan : La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont continues sur $[a,b]$ permet d' intégrer terme à terme, c'est-à-dire : $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

3. La série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence $R = 1$ donc cette série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur le compact $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset]-1,1[$.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   On en déduit alors, en utilisant 2., que : $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}$.

12 **CCINP 15** Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Solution de 12 : CCINP 15

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur X.
   On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{t \in X} |f_n(t)|$.
   $\sum f_n$ converge normalement sur $X \Longleftrightarrow \sum \|f_n\|_\infty$ converge.
   On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.
   $\sum f_n$ converge uniformément sur $X \Longleftrightarrow$ la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur X.

2. On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur X.
   Les fonctions f_n sont donc bornées sur X et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.
   Or, $\forall x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$.
   Donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente, puisque les fonctions f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X.
   On peut donc poser $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
   $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant n+1 \Longrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{N} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \|f_k\|_\infty$.
   Alors, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :
   $\forall x \in X$, $|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. (majoration indépendante de x)

Or $\sum f_n$ converge normalement sur X donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty = 0$.
On en déduit alors que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur X.
Comme $R_n = S - S_n$, la suite (S_n) converge uniformément vers S sur X.
C'est-à-dire $\sum f_n$ converge uniformément sur X.

3. On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n^2}$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.
   On en déduit que série entière $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cette série entière converge donc normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
   En particulier, cette série entière converge normalement et donc uniformément, d'après 2., sur tout disque de centre O et de rayon R.

13 **CCINP 16** On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Solution de 13 : CCINP 16

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\dfrac{x^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
   On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.
   La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall\, x \in [0,1]$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-x}{n(x+n)}$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
   On en déduit que $\|u_n'\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.
   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.
   On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$. Elle est donc dérivable sur $[0,1]$.
   Et on a : $\forall\, x \in [0;1]$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

2. En vertu de ce qui précède, $S'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$.
Or $\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{N+1}-1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} -1$.
Donc $S'(1)=-1$.

14 **CCINP 17** Soit $A\subset\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\text{(la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A)$$
$$\Downarrow$$
$$\text{(la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A)$$

2. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, x\in[0;+\infty[$, $f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

Solution de 14 : CCINP 17

1. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur A.
On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur A.
On pose alors, $\forall\, x\in A$, $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.
$\sum f_n$ converge uniformément sur A, c'est-à-dire (S_n) converge uniformément vers S sur A, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}||S_n-S||_\infty=0$, avec $||S_n-S||_\infty=\sup_{x\in A}|S_n(x)-S(x)|$.
On a $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in A$, $|f_n(x)|=|S_n(x)-S_{n-1}(x)|\leqslant|S_n(x)-S(x)|+|S(x)-S_{n-1}(x)|$.
Donc $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in A$,$|f_n(x)|\leqslant||S_n-S||_\infty+||S_{n-1}-S||_\infty$ (majoration indépendante de x).
Or $\lim_{n\to+\infty}||S_n-S||_\infty=0$, donc $\lim_{n\to+\infty}(||S_n-S||_\infty+||S_{n-1}-S||_\infty)=0$.
Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur A.
2. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, x\in[0;+\infty[$, $f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Soit $x\in[0;+\infty[$.
Si $x=0$:
$\forall\, n\in\mathbb{N}$, $f_n(0)=0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.
Si $x\neq 0$:
$\lim_{n\to+\infty} n^2 f_n(x)=0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f_n(x)=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Or $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge absolument donc, par critère de domination, $\sum f_n(x)$ converge absolument.
On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
$\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0;+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0$, donc f_n est bornée sur $[0;+\infty[$.
Comme f_0 est bornée ($f_0=0$), on en déduit que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, f_n est bornée.
De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
En effet, si $x=0$ alors $f_n(0)=0$ et si $x\neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.
On a $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{e}^{-1}$.

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = |f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)| \leqslant \sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)|$; donc $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)| \geqslant e^{-1}$.
Ainsi, $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
On en déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0;+\infty[$.
Donc, d'après 1., $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;+\infty[$.

15 **CCINP 18** On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Solution de 15 : CCINP 18

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
   En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.
   En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
   On a donc $D =]-1, 1]$.

2. (a) $\forall\, x \in D$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
   $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in]-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.
   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$ ne converge pas normalement sur D.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}\, x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, ce qui est absurde.

   (b) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $]-1, 1[$. (*)
   Pour étudier la continuité en 1, on peut se placer sur $[0, 1]$.

   $\forall\, x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste.
   On a, $\forall\, x \in [0, 1]$, $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)
   Et, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
   Donc, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
   Les fonctions u_n étant continues sur $[0, 1]$, la somme S est alors continue sur $[0, 1]$.
   Donc, en particulier, S est continue en 1. (**)
   Donc, d'après (*) et (**), S est continue sur D.

16 **suite de CCINP 18** Montrer que S est dérivable sur $\mathring{D}$. Calculer S', puis S et enfin $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

17 **CCINP 53** On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution de 17 : CCINP 53

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4x^3}$.
   Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
   Conclusion : $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.
   - Prouvons que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

     $\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{b}{n^4a^4}$ (majoration indépendante de x).
     De plus, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).
     Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
   - Prouvons que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

     $\forall x \in [a,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{x}{n^4x^4} = \frac{1}{n^4x^3} \leqslant \frac{1}{n^4a^3}$ (majoration indépendante de x).
     De plus, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).
     Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

   (c) On remarque que f_n est continue sur le compact $[0,1]$, donc f_n est bornée sur $[0,1]$.
   De plus, d'après 1.(b), $\forall x \in [1,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^4}$, donc f_n est bornée sur $[1,+\infty[$.

On en déduit que f_n est bornée sur $[0,+\infty[$ et que $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|$ existe.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|\geqslant f_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{2n}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

Autre méthode :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $f_n'(x)=\dfrac{1-3n^4x^4}{\left(1+n^4x^4\right)^2}$.

On en déduit que f_n est croissante sur $\left]0,\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n},+\infty\right[$.

f_n étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_n est bornée.

Donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|$ existe et $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|=f_n(\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n})=\frac{3^{\frac{3}{4}}}{4n}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

2. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$. (1)

   $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$. (2)

   Donc, d'après (1) et (2), f est continue sur $]0,+\infty[$.

   Comme f est impaire, on en déduit que f est également continue sur $]-\infty,0[$.

   Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0$ car, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^4x^3}$.

   D'après 1.(b), $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.

   Donc, d'après le cours, f admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=0$.

   Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

3. Autres exercices

18 Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet [1]

On pose $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$ et $\eta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer ses dérivées successives comme sommes de séries de fonctions.
4. Étudier les variations de ζ.

1. Incontournable : presque du cours.

5. Calculer la limite en $+\infty$.
6. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
7. Donner un équivalent en 1 en comparant à une intégrale.
8. Tracé le graphe de ζ.
9. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
10. Démontrer que η est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
11. Montrer que si $x>1$, $\eta(x)=\left(2^{1-x}-1\right)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.

Solution de 18 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet[2]

1. $]1,+\infty[$
2. $[a,+\infty[$ où $a>1$.
3. $f_n^{(k)}(x)=(-1)^k\dfrac{\ln^k(n)}{n^x}$. CN sur tout $[a,+\infty[$. D'où la classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\zeta^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln^k(n)}{n^x}$.
4. ζ est décroissante.
5. 1 par double limite.
6. 1re solution : comparer à une intégrale, cf question suivante.
   2e solution : on a envie de comparer ζ près de 1 à la série harmonique.
   Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme ζ st décroissante, elle a une limite finie ou $+\infty$ en 1.
   Or on a $\ell\geqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}\xrightarrow[x\to1]{}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   Donc $\ell=+\infty$.
   ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}\xrightarrow[x\to1]{}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant A$ à partir d'un rang N.
   Pour $n=N$, on a V voisinage de 1 tel que sur V, $\zeta(x)\geqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^x}\geqslant A$.
7. $\dfrac{1}{x-1}$.
8. CS sur $\mathbb{R}_*^+$ par TSSA.
   CN sur $[a,+\infty[$, $a>1$.
   CU sur $[a,+\infty[$, $a>0$ par majoration du reste TSSA.
9. TSSA apcr : CU sur $[a,+\infty[$ pour $a>0$ de toutes les dérivées.
10. Simplifier $\phi(x)+\zeta(x)$.

19 Continuité, dérivabilité, variations, limites de $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n^4+n^2x^2}$.

Solution de 19 :

Il y a convergence normale sur $\mathbf{R}$, donc uniforme, les fonctions $x\mapsto 1/(n^4+n^2x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur $\mathbf{R}$ tout entier).

20 Démontrer que $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\pi n^2x\right)}{n^2}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Solution de 20 :

Il y a convergence normale sur $\mathbf{R}$, donc uniforme, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$ sont continues, donc f l'est (sur $\mathbf{R}$ tout entier).

21 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-n}\cos(n^2 x)$, puis la dérivabilité de la somme de cette série de fonctions. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| \leqslant 10^{-3}.$$

22 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

Vérifier que sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^+$, déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

Solution de 22 :

La convergence simple se règle facilement, en disant par exemple que pour n'importe quel $x > 0$,

$$\exp(-n^2 x) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(par croissances comparées). On majore facilement $|f_n|$ par 1 sur $\mathbf{R}_*^+$, et c'est le plus petit majorant possible, car $\lim\limits_0 f_n = 1$. Il n'y a donc pas convergence normale, vu que $\|f_n\|_\infty = 1$. Il y a en revanche convergence normale sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$ (car $\|f_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty = \exp(-n^2 a)$). Il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$, sinon la suite (f_n) convergerait uniformément vers $\tilde{0}$, ce qui n'est pas le cas.

La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, où l'on a fixé un $a > 0$ arbitraire, permet néanmoins d'utiliser le théorème de la double limite, et de trouver, en notant $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, que $\lim\limits_{+\infty} S = 1$.

Pour un développement asymptotique, la stratégie est souvent d'utiliser des comparaisons série-intégrale après avoir éventuellement mis de côté certains termes. Ici, une majoration simple permet d'éviter le recours un peu plus long à la comparaison série-intégrale : pour tout $x > 0$, $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + R(x)$ où

$$0 \leqslant R(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-k^2 x} \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-x}}$$

ce qui donne facilement

$$S(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(e^{-2x}\right)$$

23 Étudier la convergence sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonction $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)$. Sa somme est-elle continue ?

Solution de 23 :

La convergence simple est conséquence du théorème spécial sur les séries alternées. Puis la majoration du reste dans ce même théorème permet d'écrire pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0, +\infty[$, avec des notations habituelles,

$$|R_n(x)| \leqslant \ln\left(1 + \frac{x}{n+2}\right)$$

Ce qui permet facilement d'avoir la convergence uniforme sur tout segment. Les fonctions $x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n+1}\right)$ étant continues, la somme l'est.

24 **Oral des Mines** On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Domaine de définition de f.
2. Parité de f.
3. Continuité de f.
4. Limite en $+\infty$
5. La convergence est-elle uniforme ?

Solution de 24 : Oral des Mines

1. La convergence simple se traite en distinguant le cas $t=0$. Mais sans difficulté. f est définie sur $\mathbf{R}$.

2. f est impaire.

3. Dérivons $f_n : t \mapsto \frac{2t}{t^2+n^2}$. La dérivée a le signe de $2(t^2+n^2)-2t(2t)=2(n^2-t^2)$ et on en déduit que $|f_n|$ est maximale en $-n$ et en n. On trouve alors qu'il n'y a pas convergence normale. En revanche, il y a convergence normale, donc uniforme, sur tout segment, ce qui suffit (en n'oubliant pas de dire que les f_n sont continues) pour établir la continuité de f.

En effet, soit K un segment. Soit $M>0$ tel que $K \subset [-M, M]$. L'étude des variations de f_n sur $[-M, M]$ monte que, si $n \geqslant M$, donc au moins à partir d'un certain rang,

$$\|f_n|_K\|_\infty \leqslant f_n(M) = \frac{2M}{M^2+n^2}$$

Or $\sum_n f_n(M)$ converge, donc $\sum_n \|f_n|_K\|_\infty$ converge.

4. Un comparaison à une intégrale donne la limite : π.

5. Et donc la convergence n'est pas uniforme, car le théorème de la double limite donnerait une limite nulle.

25

1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Solution de 25 :

Plan de résolution : il y a convergence sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, uniforme car normale sur tout segment inclus dans $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ce qui assure la transmission de la continuité.

On pourrait montrer que la limite en $+\infty$ est nulle par double limite, la limite en 0 est $+\infty$ par technique habituelle (la fonction décroît, si elle n'a pas pour limite $+\infty$ en 0 elle est majorée, on en déduit que les sommes partielles sont uniformément majorées, on peut dans une somme partielle faire tendre la variable vers 0, on en déduit que $\sum 1/n$ converge. Tout cela ne nous donne pas d'équivalent !

L'idée à avoir, dans ce genre de question (équivalent), c'est la comparaison à une intégrale. Ici, notant $S(x)$ la somme de la série de fonctions au point x, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2}$$

Le calcul de l'intégrale se fait : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{t+t^2x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$$

Pour ne pas couper une intégrale qui existe en deux intégrales qui n'existent pas, on passe par

$$\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} = \int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^A \frac{x^2}{1+tx^2}\mathrm{d}t$$

On intègre avec des ln, on prend les limites quand $A \to +\infty$, et finalement on aboutit à

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

En $+\infty$, c'est raté, on ne peut qu'espérer qu'il y a un équivalent du type a/x^2, avec $1 \leqslant a \leqslant 2$. Mais en revanche, en 0, l'encadrement permet de conclure :

$$S(x) \sim_{x\to 0} -2\ln x$$

Alors au voisinage de $+\infty$, que fait-on ? on observe, et on se dit que n ne pèse pas lourd devant n^2x^2. Donc, notant $b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on espère que

$$S(x) \sim_{x\to 0} \frac{b}{x^2}$$

Pour cela, on écrit

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\left(1+nx^2\right)}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2\left(1+nx^2\right)}$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, on obtient

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où l'équivalent. Hors-programme : $b = \pi^2/6$, et on a bien $1 \leqslant b \leqslant 2$, c'est agréable.

26 Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f = g$.
5. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Solution de 26 :

1. Pour f, on peut utiliser le critère de d'Alembert pour l'absolue convergence :

$$\left|\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\right| = \frac{1}{|x+n+1|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ converge absolument donc converge pour tout $x \notin \mathbb{Z}^-$.

Pour g, on est tenté d'utiliser le TSSA. C'est possible car $\left(\frac{1}{n!(x+n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang $\max(0, \lceil -x\rceil)$ (pour avoir $x+n>0$), et, bien sûr, $\frac{1}{n!(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. On vérifie que f converge normalement sur $[1,+\infty[$: si $x \geqslant 0$, $\left|\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente.

   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par double limite, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

   Pour g, on a pour $x \in [1,+\infty[$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right| = \dfrac{1}{n!(x+n)} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente donc convergence normale donc uniforme sur $[1,+\infty[$ (on aurait aussi pu utiliser la majoration du reste dans le TSSA). Par double limite, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. On calcule

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} \\ &= x\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+m)} = x\left(f(x)-\frac{1}{x}\right) = xf(x)-1. \end{aligned}$$

   Puis,

$$xg(x) = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x+n-n)}{n!(x+n)} = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!} - \frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}\right) = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} - \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}$$

   (licite car les deux séries convergent bien). Le terme pour $n=0$ est nul dans la deuxième (attention, pas de factorielle de nombre <0) et on reconnaît une série exponentielle dans la première. Donc

$$xg(x) = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + \mathrm{e}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!(x+1+m)} = 1+g(x+1).$$

4. On obtient alors pour tout x, $f(x)-g(x) = \dfrac{f(x+1)-g(x+1)}{x}$puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x)-g(x) = \frac{f(x+n)-g(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   avec $f(t)-g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (c'est la convergence simple de f).

5. Pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on montre que $g(=f)$ l'est. On applique le théorème du cours : pour tout n, $g_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout k, $g_n^{(k)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+k}k!}{n!(x+n)^{k+1}}$. Pour montrer la convergence uniforme, on applique le TSSA sur une segment $[a,b]$ ne contenant pas d'entiers négatifs à partir d'un certain rang : $\left(\dfrac{k!}{n!(x+n)^{k+1}}\right)_{n\geqslant N}$ avec $N = \max(0,\lceil -b\rceil)$ (pour avoir $x+n>0$) décroît vers 0.

   Alors, en notant R_n^k le reste d'ordre n, $|R_n^k| \leqslant \dfrac{k!}{(n+1)!|x+n+1|^{k+1}} \leqslant \dfrac{k!}{(n+1)!|a+n+1|^{k+1}}$ qui est indépendant de x et tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$, donc il y a convergence uniforme de toutes les séries de dérivées et le théorème du cours s'applique.

27 Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{-2nx}+\mathrm{e}^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

28 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathrm{Arctan}(x+n) - \mathrm{Arctan}(x)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

2. Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Solution de 28 :

1. Utiliser le thoérème des accroissements finis. CN sur tout segment.
2. Se ramener au voisinage de 0 et utiliser la série divergente $\sum \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{n}$.