

A Une intégrale à paramètre

1. ψ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Étude sur $]0, 1]$: $0 \leq \psi(u) \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \frac{1}{u^{1/2}}$ intégrable sur $]0, 1]$ par Riemann, donc ψ l'est.

Étude sur $[1, +\infty[$: $\psi(u) = \underset{u \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{u^2} \right)$ par croissances comparées, donc par comparaison à une fonction de Riemann (positive), ψ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement, ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2. Si $x < 0$, $f_x : u \mapsto \frac{e^{-u}}{\sqrt{u(u+x)}}$ n'est pas définie sur $]0, +\infty[$ (et encore moins continue par morceaux), donc $F(x)$ n'est pas définie. Si $x \geq 0$, f_x est bien continue et positive sur $]0, +\infty[$, la convergence de l'intégrale équivaut alors à l'intégrabilité de f . Or

Étude sur $]0, 1]$: si $x \neq 0$, $f_x(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{xu^{1/2}}$ et $u \mapsto \frac{1}{u^{1/2}}$ intégrable sur $]0, 1]$ par Riemann, donc f_x l'est.

Si $x = 0$, $f_x(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$ et $u \mapsto \frac{1}{u^{3/2}}$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ par Riemann, donc f_x ne l'est pas non plus.

Étude sur $[1, +\infty[$: $f_x(u) = \underset{u \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{u^2} \right)$ par croissances comparées, donc par comparaison à une fonction de Riemann (positive), f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Finalement, f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$, et donc $F(x)$ est défini si et seulement si $x \in I =]0, +\infty[$.

3. On applique le théorème de classe \mathcal{C}^1 sous l'intégrale. Soit $f : (x, u) \in I^2 \rightarrow f(x, u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u(u+x)}}$.

H1 Pour tout $u \in I$, $x \mapsto f(x, u)$ est de classe \mathcal{C}^1 par opérations sur I , de dérivée $\frac{\partial f}{\partial x} : (x, u) \mapsto \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u(u+x)^2}}$.

H2 Pour tout $x \in I$, $u \mapsto f(x, u)$ est intégrable sur I vu la question précédente.

H3 (1) Pour tout $u \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est de classe continue sur I par **H1**.

(2) Pour tout $x \in I$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ est continue sur I par opérations.

(3) Domination : Si $a > 0$, pour tout $x \geq a$ et tout $u \in I$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right| \leq \phi_a(u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u(u+a)^2}}$ avec ϕ_a intégrable sur I car continue, positive, équivalente en 0 à $u \mapsto \frac{1}{a\sqrt{u}}$ intégrable sur $]0, 1]$ et négligeable en $+\infty$ devant $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, F est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u(u+x)^2}} du$.

4. On écrit $x F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{(x+u-u)e^{-u}}{\sqrt{u(u+x)^2}} du = -F(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}e^{-u}}{(u+x)^2} du$ et dans cette dernière intégrale, qui existe bien, on fait une intégration par partie en dérivant $u \mapsto \sqrt{u}e^{-u}$ (qui est bien de classe \mathcal{C}^1) et en intégrant $u \mapsto \frac{1}{(u+x)}$ (qui est bien continue) en vérifiant que le crochet tend vers 0, donc le calcul est licite :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}e^{-u}}{(u+x)^2} du &= \left[-\frac{\sqrt{u}e^{-u}}{u+x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(-\sqrt{u} + \frac{1}{2\sqrt{u}} \right) \frac{e^{-u}}{u+x} du = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(2u-1)e^{-u}}{\sqrt{u(u+x)}} du \\ &= \frac{1}{2} F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{(u+x-x)e^{-u}}{\sqrt{u(u+x)}} du = \frac{1}{2} F(x) - K + x F(x) \end{aligned}$$

et au final,
$$xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x) = -K.$$

5. G est dérivable sur I (et même de classe \mathcal{C}^1) et pour tout $x \in I$, $G'(x) = e^{-x} \left(-\sqrt{x}F(x) + \frac{F(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}F'(x) \right) = \frac{-Ke^{-x}}{\sqrt{x}}$ en utilisant la question précédente, qui est aussi l'expression de la dérivée de $x \mapsto -K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ par théorème fondamental et continuité et intégrabilité de $\psi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ sur tout $]0, x]$ (et même sur I , en fait vu la question 1).

Comme I est un intervalle, on a donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

6. $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} C$ car $\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ce qui peut se voir en écrivant par exemple

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt - \int_x^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt - \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 0$$

par définition des intégrales généralisées convergentes.

Comme ψ est intégrable, $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} C - K^2$.

D'autre part, $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}e^{-(u+x)}}{\sqrt{u}(u+x)} du$. Avec le changement de variable $t = u/x$ (bijectif, de classe \mathcal{C}^1) on obtient $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(t+1)}}{(t+1)\sqrt{t}} dt$.

On applique l'extension de théorème de convergence dominée, avec $g(x, t) = \frac{e^{-x(t+1)}}{\sqrt{t}(t+1)}$.

H1 Pour tout $x \in I$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue par opérations sur I .

H2 Pour tout $t \in I$, $g(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}$, continu sur I et $g(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ continu sur I .

H3 Domination : Si $x, t \in I$,

$$|g(x, t)| \leq \phi(t) = \frac{1}{(t+1)\sqrt{t}}$$

où ϕ est continue, positive sur I et équivalente respectivement à $\frac{1}{t^{1/2}}$ et $\frac{1}{t^{3/2}}$ en 0 et $+\infty$ donc intégrable sur I par comparaison à des intégrales de Riemann.

Ainsi, $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = 2 \left[\text{Arctan } u \right]_0^{+\infty}$ avec le changement de variable $u = \sqrt{t}$, donc $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \pi$.

et $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} 0 dt = 0$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $C = 0$ et $C - K^2 = \pi$, d'où $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \sqrt{\pi}$.

B Étude de deux séries de fonctions

7. Soit $f_n : x \mapsto \sqrt{n}e^{-nx}$.

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .

H2 Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}}$ qui ne dépend pas de x , donc les f_n sont bornées et

$$\|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}}$ puis $\sum \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$ sont convergentes, donc $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Ainsi, f est définie et continue sur I , et, exactement de la même manière, g est définie et continue sur I .

8. Soit $x \in I$. $u \mapsto \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ étant décroissante, continue et intégrable sur I (comme dans la question 1), une comparaison série intégrale nous donne, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^{N+1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq \sum_{n=1}^N \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_0^N \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$$

En faisant $N \rightarrow +\infty$, on obtient $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$.

Le changement de variable $t = ux$ (\mathcal{C}^1 bijectif) donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{K}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{K}{\sqrt{x}}$.

Par encadrement, on en tire $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)} + n+1} \\ &= \frac{-1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n(n+1)} + n+1)} \\ &= \frac{-1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})) (n + o(n) + n + o(n))} \\ &\sim \frac{-1}{4n^{3/2}} \end{aligned}$$

qui est le terme général négatif d'une série convergente (Riemann), donc par télescopage, la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right)_{n \geq 1}$ converge

10. Soit $x > 0$. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx} \leq n e^{-nx}$ or $n^3 e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ce qui prouve que $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx}$ converge.

On considère les séries de termes généraux $a_k = \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}}$ et $b_k = e^{-kx}$ géométrique de raison $e^{-x} \in]0, 1[$.

Ces séries sont absolument convergentes de sommes $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = f(x)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \frac{b_1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x-1}$

On effectue le produit de Cauchy de ces séries absolument convergentes : $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x}$

donc $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$ Ainsi $h(x) = \frac{f(x)}{e^x-1}$ pour tout $x \in I$.

11. Quand $x \rightarrow 0$, on a $e^x - 1 \sim x$ donc avec 8., on a $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$

On a $2g(x) + 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx} = h(x)$ donc $g(x) = \frac{1}{2} \left(h(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx} \right)$

Toute suite convergente étant bornée, le 9. nous fournit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right| \leq M$

Ainsi $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx} \right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{M}{e^x-1} \sim \frac{M}{x}$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx} = o_{x \rightarrow 0}(h(x))$ donc $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} h(x)$

Ainsi $g(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \rightarrow 0$

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

12. Si A est finie alors $f_A : x \mapsto \sum_{n \in A} e^{-nx}$ est bien définie sur \mathbb{R}^+ donc si A est fini, alors $I_A =]0, +\infty[$

On suppose désormais que A est infini.

On définit φ par récurrence par $\varphi(0) = \min A$ et $\varphi(n+1) = \min(A \setminus \{\varphi(k) / 0 \leq k \leq n\})$

Par construction la suite φ est strictement croissante à valeurs dans A donc telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{\varphi(n)} = 1$

on peut extraire une suite $(b_n) = (a_{\varphi(n)})$ de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$

Soit $x = 0$, la suite $(a_n e^{-nx})$ ne converge pas vers 0 avec la suite extraite $(b_n e^{-\varphi(n)x}) = (1)_{n \geq 0}$ donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx}$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, on a $|a_n e^{-nx}| \leq e^{-nx}$ ce qui donne la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx}$

Ainsi si A est infini, alors $I_A =]0, +\infty[$

13. Soit $x > 0$, on a : $f_A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-kx}$ et $\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$

On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\text{Card}(A(n)) = \sum_{k=0}^n a_k$, on peut donc faire le produit de Cauchy de ces deux séries absolument

convergentes pour obtenir : $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Card}(A(n)) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A_1(n) = \{k^2 / k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k^2 \leq n\} = \{k^2 / k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \leq \sqrt{n}\}$
donc $A_1(n) = \{k^2 / 1 \leq k \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$ de cardinal $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$

Soit $x > 0$. À l'aide de la question précédente $\frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in [0, 1]$ donc $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1 - e^{-x}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$ donc $(1 - e^{-x})g(x) - 1 \leq f_{A_1}(x) \leq (1 - e^{-x})g(x)$ car $1 - e^{-x} > 0$.

Or d'après 11., $(1 - e^{-x})g(x)$ équivaut à $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ quand $x \rightarrow 0$ donc $\frac{2\sqrt{x}f_{A_1}(x)}{\sqrt{\pi}}$ tend vers 1 par théorème d'encadrement.

Ainsi $f_{A_1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ donc $xf_{A_1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{x\pi}}{2}$ donc $A_1 \in S$ et $\Phi(A_1) = 0$

15. Soit $x > 0$. On note la suite (a_n) associée à l'ensemble $A = A_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v(n) = \text{Card}(\{(\alpha, \beta) \in A_1^2 / \alpha + \beta = n\}) = \text{Card}(\{(k, n - k) / k \in A_1 \text{ et } n - k \in A_1\})$, donc $v(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$

car $a_0 = 0$ et aussi $v(0) = 0 = \sum_{k=0}^0 a_k a_{0-k}$.

On effectue ensuite le produit de Cauchy de la série $\sum_{k \geq 0} a_k e^{-kx}$ absolument convergente par elle-même pour obtenir que

la série $\sum_{n \geq 0} v(n) e^{-nx}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$. On note $a^{(2)}(n)$ le terme de la suite (a_n) associée à l'ensemble A_2 .

On a $a^{(2)}(n) \leq v(n)$ ainsi pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leq (f_{A_1}(x))^2$ donc $xf_{A_2}(x) \leq (\sqrt{x}f_{A_1}(x))^2$ d'où $\Phi(A_2) \leq \frac{\pi}{4}$

D Étude de deux séries de fonctions

16. Soit $\psi_1, \psi_2 \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x > 0$.

On a $|\alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx})| \leq \|\psi_1\|_\infty \alpha_n e^{-nx}$ donc la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx})$ converge par comparaison entre séries à termes positifs donc $L(\psi_1)(x)$ existe dans \mathbb{R} .

On a $L(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n e^{-nx} (\lambda\psi_1(e^{-nx}) + \psi_2(e^{-nx}))) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi_2(e^{-nx})$

Donc $L(\lambda\psi_1 + \psi_2)(x) = \lambda L(\psi_1)(x) + L(\psi_2)(x)$ puis $L(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda L(\psi_1) + L(\psi_2)$.

Donc L est bien définie sur E et l'application L est une application linéaire de E vers \mathbb{R}^I

Erreur d'énoncé? Selon lequel, l'espace d'arrivée serait $\mathbb{R}^{[0,1]}$!

On suppose que $\psi_1 \leq \psi_2$ On a pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n e^{-nx} \psi_1(e^{-nx}) \leq \alpha_n e^{-nx} \psi_2(e^{-nx})$ car $\alpha_n e^{-nx} \geq 0$, donc

$L(\psi_1)(x) \leq L(\psi_2)(x)$ par comparaison de séries. Ainsi, pour tous ψ_1, ψ_2 dans E , $\psi_1 \leq \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$

17. On a bien $E_1 \subset E$ (i) et $E_1 \neq \emptyset$ (ii) car $\theta : x \in [0, 1] \mapsto 0$ vérifie $\theta \in E$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x(L(\theta))(x) = 0$

Soit $\psi_1, \psi_2 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, on a $x(L(\lambda\psi_1 + \psi_2))(x) = \lambda x(L(\psi_1))(x) + x(L(\psi_2))(x)$ donc par combinaison linéaire de limites on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} x(L(\lambda\psi_1 + \psi_2))(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow 0} x(L(\psi_1))(x) + \lim_{x \rightarrow 0} x(L(\psi_2))(x).$$

Ceci prouve que $\lambda\psi_1 + \psi_2 \in E_1$ donc E_1 est stable par combinaison linéaire (iii)

Avec (i), (ii) et (iii), E_1 est un sous espace vectoriel de E

De plus $\Delta(\lambda\psi_1 + \psi_2) = \lambda\Delta(\psi_1) + \Delta(\psi_2)$ et $\Delta : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$ donc Δ est une forme linéaire de E_1 .

De plus $|xL(\psi_1)(x)| \leq \|\psi_1\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$

Par passage à la limite en 0, on a $|\Delta(\psi_1)| \leq \ell \|\psi_1\|_\infty$ d'où l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$

18. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $e_p \in E$ car continue par morceaux sur $[0, 1]$.

Soit $x > 0$. On a $L(e_p)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}$ donc $xL(e_p)(x) = \frac{[(p+1)x] \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}}{p+1}$ et $(p+1)x > 0$

Par composition de limites, on a $\Delta(e_p) = \frac{1}{p+1}$ et $e_p \in E_1$. On remarque que $\Delta(e_p) = \ell \int_0^1 e_p$.

Donc par combinaison linéaire, pour toute fonction polynomiale P , on a $\Delta(P) = \ell \int_0^1 P$.

Soit $\psi \in E_0$. Le théorème de Weierstrass nous fournit une suite de fonction polynomiale (P_k) qui converge uniformément vers ψ sur $[0, 1]$.

Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| = x|L(\psi - P_k)(x)|$.

Comme $-\|\psi - P_k\|_\infty e_0 \leq \psi - P_k \leq \|\psi - P_k\|_\infty e_0$, on a $-\|\psi - P_k\|_\infty L(e_0) \leq L(\psi - P_k) \leq \|\psi - P_k\|_\infty L(e_0)$ en utilisant 16.

Ainsi $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leq \|\psi - P_k\|_\infty xL(e_0)(x)$

La fonction $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est continue sur $]0, 1[$ et admet comme limite ℓ en 0, donc $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est prolongeable par continuité sur le segment $[0, 1]$ et le théorème des bornes atteintes nous fournit un majorant $M > 0$.

Donc $\forall x \in]0, 1[$, $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leq M\|\psi - P_k\|_\infty$ or $M\|\psi - P_k\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Il s'en suit que la suite de fonction $(x \mapsto xL(P_k)(x))_{k \geq 0}$ converge uniformément sur $]0, 1[$ vers $x \mapsto xL(\psi)(x)$.

En notant $\delta_k = \lim_{x \rightarrow 0} xL(P_k)(x) = \Delta(P_k)$, le théorème de la double limite nous donne alors que la suite (δ_k) converge vers un certain $L \in \mathbb{R}$ et $xL(\psi)(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} L$.

Ainsi $\psi \in E_1$. On en déduit que $E_0 \subset E_1$.

La fonction : $\psi \in E_0 \mapsto \ell \int_0^1 \psi$ est une forme linéaire continue de $(E_0, \|\cdot\|_\infty)$ car $\forall \psi \in E_0$, $\left| \ell \int_0^1 \psi \right| \leq \ell \|\psi\|_\infty$

Les applications Δ et $\psi \mapsto \ell \int_0^1 \psi$ sont continues sur E et coïncident sur la partie dense des fonctions polynomiales donc

pour tout $\psi \in E_0$, on a $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi$.

19. La fonction g_- est continue en tous points de $[0, 1] \setminus \{a - \varepsilon, a\}$

De plus $\lim_{x \rightarrow (a-\varepsilon)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (a-\varepsilon)^-} g(x) = g(a - \varepsilon) = 1$ de même en a

Donc g_- et g_+ (analogue) sont continues sur $[0, 1]$ ainsi g_- et $g_+ \in E_0$

On a

- $\Delta(g_-) = \ell \int_0^1 g_- = \ell \left(\int_0^{a-\varepsilon} g_- + \int_{a-\varepsilon}^a g_- + \int_a^1 g_- \right)$
- $\int_0^{a-\varepsilon} g_- = a - \varepsilon$ et $\int_{a-\varepsilon}^a g_- = \frac{\varepsilon \cdot 1}{2}$ (aire d'un triangle)
- $\int_a^1 g_- = 0$
- $\Delta(g_+) = \ell \left(\int_0^a g_+ + \int_a^{a+\varepsilon} g_+ + \int_{a+\varepsilon}^1 g_+ \right)$
- $\int_0^a g_+ = a$ et $\int_a^{a+\varepsilon} g_+ = \frac{\varepsilon \cdot 1}{2}$ et $\int_{a+\varepsilon}^1 g_+ = 0$

donc $\Delta(g_-) = \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $\Delta(g_+) = \ell\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$

On a aussi $1_{[0,a]} \in E$ et $g_- \leq 1_{[0,a]} \leq g_+$ donc pour tout $x > 0$, $xL(g_-)(x) \leq xL(1_{[0,a]})(x) \leq xL(g_+)(x)$.

On a ensuite $xL(g_-)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ceci nous fournit $\alpha_1 > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha_1]$, $xL(g_-)(x) \geq \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \ell\frac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall x \in]0, \alpha_1]$, $xL(g_-)(x) \geq \ell(a - \varepsilon)$

De même on peut trouver $\alpha_2 > 0$, on a $\forall x \in]0, \alpha_2]$, $xL(g_+)(x) \leq \ell(a + \varepsilon)$.

Alors, en prenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, on a $\forall x \in]0, \alpha]$, $|xL(1_{[0,a]})(x) - \ell a| \leq \ell\varepsilon$

On vient de montrer que $xL(1_{[0,a]})(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ell a$ car $\ell\varepsilon$ est aussi petit que l'on veut ainsi $1_{[0,a]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a]}) = \ell a = \ell \int_0^1 1_{[0,a]}$.

Pour $1_{[0,a]}$, les calcul sont identiques ce qui donne : $1_{[0,a]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a]}) = \ell a = \ell \int_0^1 1_{[0,a]}$.

Pour $\alpha \in [0, 1]$, on note $\delta_\alpha = 1_{\{\alpha\}}$. On a donc $\delta_\alpha = 1_{[0,\alpha]} - 1_{[0,\alpha]}$ ainsi par linéarité $\delta_\alpha \in E_1$ et $\Delta(\delta_\alpha) = 0 = \ell \int_0^1 \delta_\alpha$.

On remarque que $L(\delta_0) : x \rightarrow 0$ donc on a encore : $\delta_0 \in E_1$ et $\Delta(\delta_0) = 0 = \ell \int_0^1 \delta_0$.

En ce qui concerne $1_{[a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a]}$, on a $1_{[a,b]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[a,b]}) = \ell(b - a) = \ell \int_0^1 1_{[a,b]}$.

C'est analogue pour $1_{]a,b[}$, $1_{]a,b]}$ et $1_{[a,b[}$ et cela reste valable même si $a = 0$.

On sait que $E_1 \subset E$. Soit maintenant $\psi \in E$.

On peut écrire $\psi = \varphi + \mathbb{E}$ où φ est continue sur $[0, 1]$ et \mathbb{E} est une fonction en escalier

On peut écrire $\mathbb{E} = \sum_{i \in I} \lambda_i 1_{J_i}$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille finie de réels et $(J_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'intervalles de $[0, 1]$ (éventuellement singleton)

Or $\varphi \in E_1$ d'après 18 et les $1_{J_i} \in E_1$ d'après ce qui précède et on a $\Delta(\varphi) = \ell \int_0^1 \varphi$ et $\Delta(1_{J_i}) = \ell \int_0^1 1_{J_i}$.

Comme Δ est linéaire sur le sous-espace vectoriel E_1 , on en déduit $\psi \in E_1$ et $\Delta(\psi) = \Delta(\varphi) + \sum_{i \in I} \lambda_i \Delta(1_{J_i}) = \ell \int_0^1 (\varphi + \mathbb{E})$.

On en déduit que $E_1 = E$ et $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi$ pour tout $\psi \in E$.

20. On a $(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N}) = \sum_{n=0}^N \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N}) = \sum_{n=0}^N \alpha_n e^{-n/N} e^{n/N}$ donc $(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{k=0}^N \alpha_k$.

On a $x(L(\psi))(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi = \ell \int_{1/e}^1 \psi = \ell(\ln(1) - \ln(1/e))$

Donc par composition de limites, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \alpha_k = \ell = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right)$.

21. En reprenant les notations de la partie C. On a $\text{Card}(A(n)) = \sum_{k=0}^n a_k$. Comme $A \in S$, $\left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) = x f_A(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Phi(A)$.

On peut appliquer donc le résultat précédent à la suite (a_n) . Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card}(A(n)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x f_A(x)$

Si $A \in S$, alors $\frac{1}{n} \text{Card}(A(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(A)$

Pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} v(n) e^{-nx}$ converge ayant pour somme $(f_{A_1}(x))^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v(n) \geq 0$. De plus, $x(f_{A_1}(x))^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{4}$

d'après 14 et 15. On peut donc appliquer les résultats de cette partie et alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v(k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$.