Corrigé du Concours blanc

Exercice 1 : Séries

1. $\ln(n+1)-\ln n=\ln(1+1/n)\sim 1/n$. Comme $\sum 1/n$ diverge et que les suites sont à termes positifs, par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence, et par simplification télescopique $H_n\sim\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\ln(n+1)$.

Enfin, $\ln(n+1)=\ln(n)+\ln(1+1/n)\sim\ln(n)$ permet de conclure que $\boxed{H_n\sim\ln(n).}$

2. (a) On pose cette fois $v_n=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))$ (définies pour $n\geqslant 2$). On a des suites à termes strictement positifs. De plus, par télescopage, $\sum_{k=2}^{n}v_k=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))\to+\infty$ ce qui montre que $\sum v_k$ diverge. Enfin,

$$v_n=\ln\left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)=\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)\sim\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\sim\frac{1}{n\ln(n)}$$

On peut donc encore utilise le théorème de sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence pour conclure que $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\sim\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))\sim\ln(\ln(n+1))$.

Comme $\ln(\ln(n+1))=\ln(\ln(n)+\ln(1+1/n))=\ln(\ln(n))+\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)\sim\ln(\ln(n))$ on conclut que $\boxed{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\underset{+\infty}{\sim}\ln(\ln(n)).}$

(b) En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum w_n$ est de limite infinie et $\boxed{\text{la série diverge.}}$

(c) De façon alternative, on peut considérer la fonction $f\,:\,x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)}$. f est décroissante et continue sur $[2,+\infty[$ et on peut donc utiliser une comparaison série-intégrale pour montrer que pour tout $n\geqslant 2$,

$$\frac{1}{n\ln n}+\int_2^n\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\leqslant\int_2^n\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\ln 2}$$

avec $\int_2^n\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)$. Ainsi,

$$1+\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}\leqslant\frac{T_n}{\ln(\ln n)}\leqslant 1-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}+\frac{1}{2\ln 2\ln(\ln n)}$$

et donc $\boxed{T_n\sim\ln(\ln n)}$ et $\boxed{\text{la série }\sum\frac{1}{n\ln n}\text{ diverge.}}$

3. Étude de deux exemples

(a) Les trois premiers points de (P) sont vrais et le quatrième aussi (on a une série géométrique de raison 1 qui diverge). Ici, $A_n=n$ et $b_n=\frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{H_n}{\ln(n)}$.

La question **1** indique que $\boxed{b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.}$

(b) Les quatre points de la propriété (P) sont vrais (la suite est à valeurs dans $]0,1]$ et la série associée, de Riemann, est divergente). On a $A_k=H_k$ et donc $b_n=\frac{1}{\ln(H_n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kH_k}$.

Posons $u_n=\frac{1}{nH_n}$; u et w (définies à partir du rang 2) sont strictement positives à partir du rang 3. Ce sont des termes généraux de suites équivalentes (question **1**), et de séries divergentes (question **2.b**). Le théorème de sommation des relations de comparaisons dans le cas de divergence indique que $\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{kH_k}\sim\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$.

Ajouter les termes d'indices 1 et 2 ne change rien à l'équivalence car les sommes sont de limites infinies (les constantes sont alors négligeables) et avec la question **2.a** on a $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kH_k}\sim\ln(\ln(n))$.

Enfin, $\ln(H_n)=\ln(\ln(n))+\ln\left(\frac{\ln(n)}{H_n}\right)\sim\ln(\ln(n))$ (le second terme, de limite nulle, est négligeable devant le premier, de limite infinie). On a finalement $\boxed{b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.}$

4. On revient au cas général

(a) On a $A_n=A_{n-1}+a_n$. Par ailleurs $A_n\to+\infty$ (suite croissante car (a_n) est à termes positives, et non convergente car $\sum a_n$ diverge) et (a_n) est bornée donc $a_n=o(A_n)$. Ainsi, $A_n=A_{n-1}+o(A_n)$ et donc $\boxed{A_n\sim A_{n-1}.}$

(b) On en déduit que $\frac{A_n}{A_{n-1}}\to 1$ et donc $\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)\sim\frac{A_n}{A_{n-1}}-1=\frac{a_n}{A_{n-1}}$. Enfin, $A_{n-1}\sim A_n$ donne $\boxed{\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{a_n}{A_n}.}$

(c) $u_n=\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$ est le terme général ($n\geqslant 2$) d'une suite strictement positive et d'une série télescopique divergente ($\sum_{k=2}^{n}u_k=\ln(A_n)-\ln(A_1)\to+\infty$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum(a_k/A_k)\text{ diverge.}}$

(d) Plus précisément, comme les suites sont à termes positifs, on peut utiliser le théorème de sommation des relations de comparaisons dans le cas de divergence pour obtenir $\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{A_k}\sim\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right)=\ln A_n-\ln A_1$. Ces suites sont de limite infinie et ainsi l'équivalence s'écrit $\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{A_k}\sim\ln(A_n)$. Ajouter le terme pour $k=1$ ne change rien car les termes tendent vers $+\infty$. Ainsi $\boxed{b_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.}$

5. On va essayer d'utiliser le résultat précédent pour construire (v_n). Pour cela, il nous faut une suite vérifiant (P) et on distingue donc deux cas.

- Si (u_n) est bornée, on pose $a_1=1$ et $\forall n\geqslant 1,\ a_n=u_n$. On a alors (a_n) qui vérifie (P). $\sum(a_n/A_n)$ diverge (question **4.c**) et $\frac{a_n}{A_n}=o(a_n)$ (le quotient vaut $1/A_n$ et tend vers 0). La suite de terme général $v_n=\frac{a_n}{A_n}$ convient donc.
- Sinon, on pose $w_n=\min(u_n,1)$. On a $w_n>0$ et $\sum w_n$ diverge (car u_n est régulièrement plus grand que 1 et il existe une suite extraite de w qui est constante égale à 1 ce qui donne la divergence grossière de la série). Le premier cas donne une suite $v_n=o(w_n)$ à termes >0 et de série divergente. On a a fortiori $v_n=o(u_n)$ (puisque $0\leqslant w_n\leqslant u_n$).

Exercice 2 : Intégrales impropres

Partie I : Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.

1. *Étude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*

   $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0,\pi]$ et $f_\alpha(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$. Donc par comparaison avec une intégrale de Riemann, f_α est intégrable si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ et donc, par positivité, $\boxed{I(\alpha) \text{ est convergente si et seulement si } \alpha < 2.}$

2. *Étude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

   (a) f_α est continue sur $[\pi,+\infty[$ et $|f_\alpha(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\boxed{\text{si } \alpha > 1,\ J(\alpha) \text{ est absolument convergente.}}$

   (b) Si $t \in \mathbb{R}$, $t+\pi \in \mathbb{R}$ et $|\sin(t+\pi)| = |-\sin t| = |\sin t|$ $\boxed{\text{d'où la } \pi\text{-périodicité.}}$

   Alors, par périodicité et positivité de sin sur $[0,\pi]$,

   $$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \left[-\cos t\right]_0^\pi$$

   donc $\boxed{\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t = 2.}$

   (c) Soit $\alpha \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$. Par relation de Chasles, $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$

   Or, si $k \geqslant 1$, pour tout $t \in [k\pi,(k+1)\pi]$, en utilisant la question précédente,

   $$\frac{2}{(k+1)^\alpha\pi^\alpha} = \frac{\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{((k+1)\pi)^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t}{(k\pi)^\alpha} = \frac{2}{k^\alpha\pi^\alpha}.$$

   Puis en sommant pour k allant de 1 à $n-1$ et avec un changement d'indice dans la somme de gauche, $\boxed{\displaystyle\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}.}$

   (d) Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, en tant que série de Riemann, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \to +\infty$, donc $\displaystyle\int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \to +\infty$ et $J(\alpha)$ n'est pas absolument convergente.
   Si $\alpha > 1$, la question 2.a permet de conclure.

   Remarque : le résultat se retrouve par le fait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge donc avec l'encadrement de la question précédente, $\left(\displaystyle\int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 2}$ est bornée. Donc $x \mapsto \displaystyle\int_\pi^{x}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ l'est aussi sur $[\pi,+\infty[$ car, par positivité, si $x \geqslant \pi$,

   $$0 \leqslant \int_\pi^{x}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\pi^{n\pi}\frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

   avec n tel que $x \leqslant n\pi$ (par exemple $\lceil x/\pi\rceil$.) Donc, toujours pas positivité, si $\alpha > 1$, $J(\alpha)$ converge absolument.

   Finalement, $\boxed{J(\alpha) \text{ converge absolument si et seulement si } \alpha > 1.}$

3. *Étude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

   (a) $\displaystyle\int_\pi^x \sin t\,\mathrm{d}t = -1-\cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$. Donc $\boxed{J(0) \text{ diverge.}}$

   (b) On intègre par parties, $-\cos$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\pi,x]$,

   $$\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t^\alpha}\right]_\pi^x - \alpha\int_\pi^x\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

   donc $\boxed{\displaystyle\int_\pi^x \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos x}{x^\alpha} - \alpha\int_\pi^x\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.}$

   (c) Comme cos est bornée et $\alpha > 0$, $\dfrac{\cos x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et $t \mapsto \dfrac{|\cos t|}{t^{\alpha+1}}$ est continue et positive sur $[\pi,+\infty[$ et $\dfrac{|\cos t|}{t^{\alpha+1}} \leqslant \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ avec $\alpha+1 > 1$ donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

   Finalement, avec la question précédente, $\boxed{J(\alpha) \text{ converge pour } \alpha > 0.}$

4. *Domaine de définition de la fonction f*

   Les questions précédentes permettent de conclure que $\boxed{f(\alpha) \text{ converge absolument sur }]1,2[}$ et $\boxed{\text{converge sur }]0,2[\text{ qui est donc le domaine de définition de } f}$
   (Pour $I(\alpha)$ absolue converge et convergence sont identiques par positivité).

Partie II : Calcul de l'intégrale $f(1)$

5. *Calcul d'intégrales auxiliaires*

   (a) $f_n : t \mapsto \dfrac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}$ et $g_n : t \mapsto \dfrac{\sin(2nt)}{t}$ sont continues sur $]0,\pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0 (par $f_n(0) = 2n$ et $g_n(0) = 2n$). Ce sont donc des fonctions intégrables sur le segment $[0,\pi/2]$ et $\boxed{u_n \text{ et } v_n \text{ existent a fortiori.}}$

   (b) La formule $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$ indique que

   $$u_{n+1}-u_n = 2\int_0^{\pi/2}\cos((2n+1)t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

   La formule $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ indique alors que

   $$u_{n+1}-u_n = \int_0^{\pi/2}(\cos((2n+2)t)+\cos(2nt))\,\mathrm{d}t$$

   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n = 0.$

   La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc constante et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\displaystyle u_n = u_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.}$

6. *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$*

Une intégration par parties donne $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ G_m = \left[g(t)\dfrac{\mathrm{e}^{imt}}{im}\right]_a^b - \dfrac{1}{im}\displaystyle\int_a^b g'(t)\mathrm{e}^{imt}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi, on a $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ |G_m| \leqslant \dfrac{|g(a)+g(b)|}{m} + \dfrac{|b-a|}{m}\|g'\|_{\infty,[a,b]}$.

ceci étant licite car g' est continue sur le segment $[a,b]$. On a alors $\boxed{G_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.}$

7. *Conclusion*

(a) g est une fonction continue sur $[0,\pi/2]$ et

$$g(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{t\sin(t)} = \frac{(t+o(t^2)) - (t+o(t^2))}{t^2+o(t^2)} = \frac{o(1)}{1+o(1)}$$

On en déduit que$g(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et g est prolongable par continuité en posant $g(0) = 0$. On a alors une fonction continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$ avec

$$\forall t > 0,\ g'(t) = \frac{t^2 - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)} = \frac{(t-\sin(t))(t+\sin(t))}{t^2\sin^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(t^3/6)(2t)}{t^4} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

Par le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ (limite de la dérivée), on en déduit que $\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi/2]}$ avec $g'(0) = 1/3$.

(b) On remarque que $v_n - u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue (en passant à la partie imaginaire) on a donc $\boxed{v_n - u_n \to 0.}$

(c) Le changement de variable $x = 2nt$ donne $v_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. En faisant tendre n vers $+\infty$ (on a existence des différentes quantités avec ce qui précède) on en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{2}.}$

Exercice 3 : Algèbre

1. **Étude du cas** $n = 2$

(a) On vérifie que si $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\phi_A(M+\lambda N) = \phi_A(M) + \lambda\phi_A(N)$ d'où $\boxed{\text{la linéarité}}$ et on calcule $\phi_A(I_2) = \phi_A(A) = 0_2$ donc $\boxed{I_2, A \in \operatorname{Ker}\phi_A.}$

(b) On calcule $\phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0\end{pmatrix}$, $\phi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0\end{pmatrix}$, $\phi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c\end{pmatrix}$ et $\phi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b\end{pmatrix}$.

D'où la matrice de ϕ_A : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}}$.

(c) On calcule $\boxed{\chi_{\phi_A} = X^2\left(X^2 - \left((a-d)^2 + 4bc\right)\right).}$

(d) **Si** $(a-d)^2 + 4bc < 0$, **alors** χ_{ϕ_A} n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc ϕ_A n'est pas diagonalisable.

Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$, **alors** $\chi_{\phi_A} = X^4$ et ϕ_A n'est pas l'endomorphisme nul donc n'est pas diagonalisable.

Si $(a-d)^2 + 4bc > 0$, **alors** χ_{ϕ_A} admet deux valeurs propres réelles simples non nulles et 0 comme valeur propre double. Donc $\dim\operatorname{Ker}\phi_A \leqslant 2$ et ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $E_0(\phi_A) = \operatorname{Ker}\phi_A$ est de dimension 2.

Mais comme I, A sont des matrices linéairement indépendantes de $\operatorname{Ker}\phi_A$, $\dim\operatorname{Ker}\phi_A \geqslant 2$ et donc $\dim\operatorname{Ker}\phi_A = 2$.

Ainsi, ϕ_A est diagonalisable.

Bilan : $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } (d-a)^2 + 4bc > 0.}$

(e) On calcule $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ dont le discriminant est $(d-a)^2 + 4bc$.

Si $(a-d)^2 + 4bc < 0$, **alors** χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas diagonalisable.

Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$, **alors** A admet une unique valeur propre λ et n'est pas de la forme λI_2 d'après l'énoncé, donc n'est pas diagonalisable.

Si $(a-d)^2 + 4bc > 0$, **alors** A admet deux valeurs propres réelles distinctes en dimension 2 donc est diagonalisable.

On retrouve donc la CNS de la question précédente, et on conclut que $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable.}}$

2. **Étude du cas général**

(a) i. ϕ_A étant diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\boxed{\text{toutes ses valeurs propres sont réelles}}$

(Le polynôme caractéristique est le même dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ et il est scindé dans $\mathbb{R}$).

ii. Comme $\chi_A = \chi_{A^\intercal}$, $\boxed{A \text{ et } A^\intercal \text{ ont mêmes valeurs propres.}}$

iii. $\phi_A(XY^\intercal) = AXY^\intercal - XY^\intercal A = zXY^\intercal - X(A^\intercal Y)^\intercal = zXY^\intercal - X\left(\overline{z}Y\right)^\intercal = \left(z - \overline{z}\right)XY^\intercal$.

Reste à voir que $XY^\intercal \neq 0$, avec $XY^\intercal = (x_i y_j)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. Comme $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, on a bien au moins un cœfficient de $XY^\intercal$ non nul.

Finalement, $\boxed{z - \overline{z} \text{ est une valeur propre de } \phi_A.}$

(b) Si z est une valeur propre complexe de A (on sait qu'il en existe par le théorème de d'Alembert-Gauß), alors $\overline{z}$ est aussi valeur propre car $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ puis $z - \overline{z}$ est valeur propre de ϕ_A d'après la question précédente et donc $z - \overline{z} \in \mathbb{R}$ vu que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles. Mais $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}\,z$ donc $z - \overline{z} = 0$ et $z = \overline{z} \in \mathbb{R}$.

On a même montré que $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont réelles.}}$

(c) On calcule $\phi_A(P_{i,j})X = AP_{i,j}X - P_{i,j}AX = AP_{i,j}X - \lambda P_{i,j}X$ d'une part et $\phi_A(P_{i,j})X = \lambda_{i,j}P_{i,j}X$ d'autre part. Ainsi, $\boxed{AP_{i,j}X = \left(\lambda + \lambda_{i,j}\right)P_{i,j}X.}$

(d) Question plus délicate. On peut remarquer que $\left(P_{i,j}X\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour en extraire une base (de vecteurs propres de A d'après la question précédente, comme ils sont alors non nuls).

En effet, c'est l'image de la base $\left(P_{i,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application linéaire $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & MX\end{array}\right.$ qui est surjective car si $Y\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $y\in\mathbb{R}^n$ canoniquement associé, et $x\neq 0$ associé à $X\neq 0$, on peut trouver $v\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $v(x)=y$. En effet, il suffit de compléter le vecteur non nul x en une base de $\mathbb{R}^n$ et de prendre l'endomorphisme qui envoie chaque vecteur de cette base sur y, par exemple. La matrice M dans la base canonique de cet endomorphisme est un antécédent de Y par f.

Finalement, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

3. **Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0**

(a) C'est une question de cours.
La famille est libre car m est par définition le degré minimal d'un polynôme annulateur non nul de A.
Elle est génératrice car si $P\in\mathbb{R}[X]$, μ_A le polynôme minimal de A, par division euclidienne, $P=\mu_A Q+R$ avec $\deg R<m$ et $P(A)=R(A)\in\operatorname{Vect}\left(I_n,A,\dots,A^{m-1}\right)$.

Finalement, $\boxed{\left(I_n,A,\dots,A^{m-1}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}[A].}$

(b) Comme pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\phi_A\left(A^k\right)=AA^k-A^kA=0$, $\boxed{\mathbb{R}[A] \text{ est inclus dans } \operatorname{Ker}\phi_A}$ et vu la question précédente $\boxed{m=\dim\mathbb{R}[A]\leqslant\dim\operatorname{Ker}\phi_A.}$

(c) Si $B\in\operatorname{Ker}\phi_A$, alors $AB=BA$ donc u et v commutent et donc par le cours, pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v.
Réciproquement, si pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v, comme u est diagonalisable, on a une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u. Or si x_k vecteur propre associé à la valeur propre λ_k, $v(u(x_k))=v(\lambda_k x_k)=\lambda_k v(x_k)$ et comme $x_k\in E_u(\lambda_k)$, par stabilité $v(x_k)\in E_u(\lambda_k)$ donc $u(v(x_k))=\lambda_k v(x_k)=v(u(x_k))$.
Comme $v\circ u$ et $u\circ v$ coïncident sur une base, elles sont égales, ce qui signifie que $B\in\operatorname{Ker}\phi_A$.

Finalement, $\boxed{B\in\operatorname{Ker}\phi_A \text{ si et seulement si, pour tout entier } k,\ E_u(\lambda_k) \text{ est stable par } v.}$

(d) On en déduit directement d'après le cours que $B\in\operatorname{Ker}\phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u est $\boxed{\text{diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de format } m_k\times m_k \text{ avec } 1\leqslant k\leqslant p.}$

(e) On a alors $\boxed{\dim\operatorname{Ker}\phi_A=\sum_{k=1}^{p}m_k^2.}$

Fin