CCP 2008. Filière MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I. Généralités.

1) Pour $x > 1$ la série définissant F converge absolument, pour $0 < x \leqslant 1$ elle converge par le critère spécial des séries alternées et enfin pour $x \leqslant 0$ elle diverge grossièrement. Le domaine de définition de F est donc $]0, +\infty[$. $\square$

2) $g_n(t) = \dfrac{1 + (-1)^n t^{n+1}}{1+t}$ pour $t \neq -1$. Donc sur $[0, 1[$ la suite (g_n) converge simplement vers $g : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ et est dominée par la fonction constante égale à 2 intégrable sur $[0, 1[$. Le théorème de la convergence dominée permet donc d'affirmer que $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}\,t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t}$ i.e. $F(1) = \ln 2$. $\square$

3) Notons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Pour $x \geqslant 2$ il vient que $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Ainsi $\sum f_n(x)$ converge normalement sur $[2, +\infty[$ et le théorème du double passage à la limite permet d'affirmer (puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour $n \geqslant 2$) que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. $\square$

4)

a) En notant $\varphi(t) = \dfrac{\ln t}{t^x}$ pour $t > 0$ (avec $x > 0$ fixé), il vient que $\varphi'(t) = \dfrac{t^{x-1}(1 - x\ln t)}{t^{2x}}$ donc φ est décroissante pour $t \geqslant e^{1/x}$. La suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est donc asymptotiquement décroissante. $\square$

b) Pour prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et en outre dérivable terme à terme, il suffit de prouver que :
(1) : les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$
(2) : la série $\sum f_n(t)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$
(3) : la série $\sum f_n'(x)$ converge localement uniformément sur $]0, +\infty|$.

Or (1) est clair et (2) a été établi en la question 1).

Par ailleurs $f_n'(x) = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^x}$. Soit alors $a > 0$.

Pour $x \geqslant a$ et $n \geqslant e^{1/a}$ la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)$ décroît (vers 0 par croissances comparées) compte-tenu de la question précédente. Donc la série $\sum f_n'(x)$ relève du théorème spécial pour $x \geqslant a$ et $n \geqslant e^{1/a}$.

Ainsi : $\left|\displaystyle\sum_{n+1}^{+\infty} f_k'(x)\right| \leqslant |f_{n+1}'(x)| \leqslant \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = \varepsilon_n \quad \forall x \geqslant a \quad \forall n \geqslant e^{1/a}$.

Ce qui prouve que la série $\sum f_n'(x)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. donc (3) est bien satisfaite.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$ $\square$

5) Soit $x > 1$ fixé. Comme les séries $\sum \dfrac{1}{(2n)^x}$ et $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^x}$ convergent, on peut écrire :

$F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^x}$ et $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^x}$ donc :

$F(x) - \zeta(x) = -2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$ soit $F(x) = \big(1 - 2^{1-x}\big)\zeta(x) \quad \forall x > 1$. $\square$

D'où $\zeta(x) \sim F(x)$ au voisinage de $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$. $\square$

Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même.

6)

a) Pour $x > 1$ la série définissant $F(x)$ converge absolument donc son produit de Cauchy par elle-même converge absolument vers $F(x)^2$. $\square$

b) Il vient $c_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{(-1)^{p-1}}{p^x} \times \frac{(-1)^{n-p-1}}{(n-p)^x} = (-1)^n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\big(p(n-p)\big)^x}$. Or $p(n-p) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Donc $|c_n(x)| \geqslant (n-1)\dfrac{4^x}{n^{2x}} = a_n$. $\square$

Or $a_n \sim \dfrac{4^x}{n^{2x-1}}$ ne tend pas vers 0 (pour x fixé et $n \to +\infty$) si $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Donc dans ce cas $\sum c_n(x)$ diverge grossièrement. $\square$

7)

a) $\dfrac{1}{X(n-X)} = \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{n-X}\Big)$.

Donc $c_n(1) = (-1)^n \sum\limits_{p=1}^{n-1} \dfrac{1}{p(n-p)} = \dfrac{(-1)^n}{n} \sum\limits_{p=1}^{n-1} \Big(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n-p}\Big) = 2(-1)^n \dfrac{H_{n-1}}{n}$ $\square$

b) En écrivant que $H_n = H_{n-1} + \dfrac{1}{n}$ il vient immédiatement que $\dfrac{H_{n-1}}{n} - \dfrac{H_n}{n+1} = \dfrac{H_{n-1}-1}{n(n+1)}$ et ainsi la suite $\Big(\dfrac{H_{n-1}}{n}\Big)$ est-elle décroissante. $\square$

c) Comme en outre $\dfrac{H_{n-1}}{n} \sim \dfrac{\ln n}{n}$ tend vers 0, la série $\sum c_n(1)$ converge par critère spécial aux séries alternées. $\square$

On peut facilement montrer qu'elle converge bien vers le produit des sommes i.e. $(\ln 2)^2$. *Cf annexe 1 à la fin.*

Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1.

8)

a) Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, elle est en particulier dérivable en 1 et admet donc en 1 un développement limité qui est le développement de Young : $F(1+h) = \ln 2 + F'(1)h + o(h)$ $\square$

En notant $g(x) = 1 - 2^{1-x}$ il vient $g(1+h) = 1 - 2^{-h} = 1 - e^{-ln 2 \times h} = (\ln 2)h - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}h^2 + o(h^2)$ $\square$

b) Pour $x > 1$ on a (question 5) $\zeta(x) = F(x)/g(x)$ et ainsi pour $h > 0$:

$\zeta(1+h) = \dfrac{1}{(\ln 2)h} \times \dfrac{\ln 2 + F'(1)h + o(h)}{1 - \dfrac{\ln 2}{2}h + o(h)} = \dfrac{1}{(\ln 2)h}\Big(\ln 2 + F'(1)h + o(h)\Big)\Big(1 + \dfrac{\ln 2}{2}h + o(h)\Big)$ donc

$\zeta(1+h) = \dfrac{1}{h} + \Big(\dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2}\Big) + o(1)$ $\square$

9)

a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^x}$ étant décroissante sur $[n, n+1]$ (car $x > 0$) il vient $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^x} \leqslant \dfrac{1}{n^x}$ d'où l'inégalité proposée valable pour tout $x > 0$. $\square$

b) Il en découle que $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout réel $x > 0$. Ainsi la série $\sum v_n(x)$ converge pour tout réel $x > 0$ en tant que série à termes positifs et à sommes partielles bornées. $\square$

En particulier $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} v_k(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n\Big) - \ln(1+\dfrac{1}{n})\Big) = \gamma$.

c) Pour tout $x > 0$ on a $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^x} - \displaystyle\int_1^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^x}$. Si en outre $x > 1$ les deux termes du membre de droite convergent et ainsi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$. $\square$

d) Soit $a > 0$ fixé. Pour $x \geqslant a$ il vient $0 \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{N} v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x} - \dfrac{1}{(N+1)^x} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a}$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ (licite vu la convergence de la série) il vient que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a}$ ce qui établit la convergence uniforme de la série $\sum v_n(x)$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. $\square$

e) Pour $n \geqslant 1$ fixé, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'intégrale propre à paramètre car $(t, x) \longmapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue sur $[n, n+1]\times]0, +\infty[$. Il en découle que v_n est continue sur $]0, +\infty[$.

Par théorème de récupération uniforme de la continuité, il vient alors que $x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et en particulier en 1^+. Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(1+h) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(1) + o(1) = \gamma + o(1)$ et la question c) prouve alors que $\zeta(1+h) = \dfrac{1}{h} + \gamma + o(1)$ $\square$

10) De l'unicité du développement limité en 1^+ de la fonction ζ, on tire alors $\dfrac{F'(1)}{\ln 2}+\dfrac{\ln 2}{2}=\gamma$.

Or $F'(1)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$ car on a démontré précédemment que F était dérivable terme à terme sur $]0,+\infty[$ donc en particulier en 1. Ainsi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}=-\ln 2\Big(\gamma-\dfrac{\ln 2}{2}\Big)$. □

Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli.

Voir démonstration de l'existence et de l'unicité de la suite des polynômes de Bernoulli en annexe 2.

11) Il vient immédiatement $B_1=X-\dfrac{1}{2}$ et $B_2=X^2-X+\dfrac{1}{6}$ donc $b_1=-\dfrac{1}{2}$ et $b_2=\dfrac{1}{6}$. □

12) Pour $n\geqslant 2$ on a $B_n(1)-B_n(0)=0$ puisque $\displaystyle\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}\,t=0$ car $n-1\geqslant 1$. □

13) On vérifie immédiatement que la suite (C_n) définie par $C_n(X)=(-1)^nB_n(1-X)$ vérifie les conditions de la suite de Bernoulli donc $B_n(X)=(-1)^nB_n(1-X)$ par unicité de la suite de Bernoulli. □

14) • Comme g_k est 2π périodique, il vient pour $x\in[-2\pi,0[$ que $g_k(-x)=g_k(2\pi-x)=B_{2k}(1-\dfrac{x}{2\pi})$ car $2\pi-x\in[0,2\pi[$. Compte-tenu de la question précédente on a donc $g_k(-x)=B_{2k}(\dfrac{x}{2\pi})=g_k(x)$.

Comme g_k est 2π périodique et que sa restriction à $[-2\pi,2\pi[$ est paire, g_k est paire.

• En outre g_k est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est périodique de période 2π, que sa restriction à $[0,2\pi[$ est continue (fonction polynomiale) et que $\lim\limits_{x\to 2\pi^-}g_k(x)=\lim\limits_{t\to 1^-}B_{2k}(t)=B_{2k}(1)=B_{2k}(0)=g_k(0)=g_k(2\pi)$ (a priori pour $k\geqslant 1$ car alors $2k\geqslant 2$ mais également vrai pour $k=0$ car $g_0=B_0=1$).

• En outre g_k est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Il en découle que g_k est égale à la somme de sa série de Fourier (de cosinus) et qu'en outre cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. L'existence est ainsi prouvée. Quant à l'unicité (d'ailleurs totalement inutile pour la suite), elle dépasse le cadre du programme. □

15)

a) Il vient par changement de variable $a_n(k)=2\displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}\,t$ (1).

Pour $k\geqslant 1$ (pour dérivation de B_{2k}) et $n\geqslant 1$ (pour primitivation de $\cos(2\pi nt)$) il vient par parties :

$a_n(k)=-\dfrac{2k}{n\pi}\displaystyle\int_0^1 B_{2k-1}(t)\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}\,t$.

En réintégrant par parties en dérivant à nouveau B_{2k-1} (on a bien $2k-1\geqslant 1$) on obtient le résultat de l'énoncé. □

b) Par ailleurs $a_n(0)=0$ d'après (1) ci-dessus (car $B_0=1$) et $B_1(1)=-B_1(0)=-\dfrac{1}{2}$ donc $a_n(1)=\dfrac{1}{(\pi n)^2}$. □

c) Pour $k\geqslant 2$ on a $a_n(k)=-\dfrac{(2k)(2k-1)}{(2\pi n)^2}a_n(k-1)$ d'après a) car $2k-1\geqslant 3\geqslant 2$ donc $B_{2k-1}(1)=B_{2k-1}(0)$.

Par une itétartion claire, compte-tenu de la valeur de $a_n(1)$ ci-dessus, on obtient $a_n(k)=\dfrac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(\pi n)^{2k}}$ □

On constate que cette formule est encore vraie pour $k=1$.

16) Pour $k\geqslant 1$ on a $a_0(k)=2\displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)\,\mathrm{d}\,t=0$ donc :

$b_{2k}=B_{2k}(0)=g_k(0)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(k)=\dfrac{(-)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(\pi)^{2k}}\times\zeta(2k)$ soit encore $\zeta(2k)=\dfrac{2^{2k-1}}{(2k)!}\times(-1)^{k-1}b_{2k}\times\pi^{2k}$. □

17)

a) Par une récurrence immédaite il vient que B_n est de degré n et la formule de Taylor pour les polynômes fournit $B_n(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{B_n^{(k)}(0)}{k!}X^k$. Or par une récurrence immédiate il vient que $B_n^{(k)}=n(n-1)\ldots(n-k+1)B_{n-k}$ donc $B_n(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,b_{n-k}X^k$ □

b) En particulier pour $n \geqslant 2$ on a $b_n = B_n(1) = b_n + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\, b_{n-k}$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\, b_{n-k} = 0$.

Ainsi $b_{n-1} = -\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k\, b_{n-k} = -\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-2} \mathrm{C}_n^k\, b_k$

La suite (b_n) est donc définie par $b_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$: $b_n = -\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n+1}^k\, b_k$. $\square$

Algorithme : on commence par créer un tableau B de n réels initialement rempli par des zéros qui contiendra à la fin le tableau $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ qui sera renvoyé par l'algorithme.
Le calcul des b_k se fait à l'aide d'une boucle “for”. Chaque étape de cette boucle comporte elle-même une boucle “for” pour le calcul de la somme. À noter l'utilisation de la variable `binom` pour éviter la répétition de calculs déjà effectués.

Programme Maple :

```
bern := proc (n)
 local B,b,binom,i,j:
 B := 0; for i from 1 to n-1 do B := B,0 od: B := [B]:
 for i from 1 to n do
   b := 1: binom := 1:
   for j from 1 to i-1 do
     binom := binom*(i+1-j+1)/j:
     b := b+B[j]*binom
   od:
   B[i] := -b/(i+1)
 od:
 B
end:

bern(20);
  [-1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66, 0, -691/2730,
   0, 7/6, 0, -3617/510, 0, 43867/798, 0, -174611/330]
```

Programme Caml L'indexation des tableaux commençant à 0, b_k est codé dans la case d'indice $k-1$ du tableau B.

```
let bern n =
   let B = make_vect n 0. in
     for i = 1 to n do
       let b = ref 1. and binom = ref 1 in
         for j = 1 to i-1 do
           binom := (!binom * (i+2-j)) / j;
           b := !b +. (B.(j-1) *. float_of_int !binom)
         done;
         B.(i-1) <- -.(!b) /. float_of_int (i+1)
     done;
     B
;;
bern : int -> float vect = <fun>
```

Ce programme fournit $b_{20} = -529.124242424$ et on vérifie bien avec Maple que :

```
evalf(-174611/330);
                              -529.1242424
```

Annexe 1 : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} c_n(1) = (\ln 2)^2$.

Pour $x \in]-1,1[$, la série entière $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ converge absolument vers $\ln(1+x)$ car son rayon de convergence est 1. Donc par produit de Cauchy on a en particulier $\ln^2(1+x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} c_n(1) x^n$ pour $x \in [0,1[$.
Comme la série $\sum c_n(1)$ converge (question 7) on peut envisager la fonction S définie sur $[0,1]$ par :
$S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} c_n(1) x^n$.

Comme la suite $\big(c_n(1)\big)$ est alternée de valeur absolue décroissante vers 0 (Cf question 7), la série précédente relève du théorème spécial pour tout $x \in [0,1]$.
Ainsi son reste d'ordre n vérifie $|R_n(x)| \leqslant |c_{n+1}(1)|x^{n+1} \leqslant |c_{n+1}(1)| \quad \forall x \in [0,1]$
ce qui prouve la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} c_n(1)x^n$ sur $[0,1]$.
Ainsi S est une fonction continue sur $[0,1]$ et en particulier en 1 donc :
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n(1) = S(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln^2(1+x) = (\ln 2)^2 \quad \square$

Annexe 2 : Existence et unicité de la suite des polynômes de Bernoulli

.

Soit le prédicat $\mathcal{P}_n$: « Il existe une unique famille $(B_0, B_1, \ldots, B_n)$ de polynômes telle que $B_0 = 1$ et pour k de 1 à n : $B_n' = nB_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 B_n = 0$ »
$\mathcal{P}_0$ est vrai. Supposons $\mathcal{P}_n$ vrai.

- Soit $(Q_0, \ldots, Q_{n+1})$ une suite satisfaisant $\mathcal{P}_{n+1}$. Alors la suite $(Q_0, \ldots, Q_n)$ satisfait $\mathcal{P}_n$ donc $Q_k = B_k$ pour $k \leqslant n$. En outre $Q_{n+1}' = (n+1)Q_n = (n+1)B_n$ détermine Q_{n+1} à une constante additive près et cette constante est déterminée par $\displaystyle\int_0^1 Q_{n+1} = 0$. D'où l'unicité de la suite $(Q_0, \ldots, Q_{n+1})$ si elle existe.
- Soit la suite $(B_0, B_1, \ldots, B_n, Q_{n+1})$ avec $Q_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (n+1)B_n(t)\,\mathrm{d}\,t + \lambda = P_{n+1}(x) + \lambda$ où λ est défini par $\lambda = -\displaystyle\int_0^1 P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}\,t$. Alors cette suite vérifie $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai et l'existence et l'unicité de la suite (B_n) est établie. $\square$

FIN