Programme de colle – MP 1

Topologie des espaces vectoriels normés

Révisions du programme de début d'année.

Convexité

Reprise du programme précédent pour exercices.

Compacité

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
Applications continues sur une partie compacte	
Image d'une partie compacte par une application continue.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.
Théorème de Heine.	
Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes sur un espace de dimension finie. Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.	Démonstration non exigible.

Connexité par arcs

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé	
Chemin continu joignant deux points.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.
Parties connexes par arcs.	Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

Semaine prochaine : Probabilités, espaces préhilbertiens.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Énoncés des caractérisations de la convexité. Démonstrations au choix du colleur.

(ii) Inégalité de Jensen (discrète).

(iii) Les compacts sont fermés bornés ; les fermés des compacts sont compacts.

(iv) Image continue d'un compact et théorème des bornes atteintes.

(v) Théorème de Heine.

(vi) Un sous-espace de dimension finie est fermé.

(vii) Une suite d'un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Cas des suites bornées en dimension finie.

(viii) Relation d'équivalence des chemins continus. Les convexes et parties étoilées sont connexes par arcs.

(ix) Connexes par arcs de $\mathbb{R}$, image continue d'un connexe par arcs.

(x) **CCINP 34** : Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

   (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

   (b) Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

   (c) Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (d) Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

(xi) **CCINP 37** : On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

   (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

   ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.

   iii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

   (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(xii) **CCINP 38** : On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

   (a) i. Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

   ii. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.

   iii. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

   (b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

(xiii) **CCINP 41** : Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques :

(a) On utilisera au moins une fois des suites.

(b) On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.

(c) Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

(xiv) **CCINP 45** : **Les questions (a) et (b) sont indépendantes**.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

(a) i. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

ii. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

(b) On pose : $\forall x \in E,\ \mathrm{d}_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

i. Soit $x \in E$. Prouver que $\mathrm{d}_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.

ii. On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall t \in [0,1],\ \mathrm{d}_A(tx + (1-t)y) \leqslant t\mathrm{d}_A(x) + (1-t)\mathrm{d}_A(y)$.
Prouver que A est convexe.