Programme de colle – MP 1

Intégrales à paramètres

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Passage à la limite sous l'intégrale	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert \mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et $$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I \lvert f_n\rvert$.
Continuité d'une intégrale à paramètre	
Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,.)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$ est définie et continue sur A.	L'hypothèse de continuité par morceaux, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination. Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A. ⇆ SI : transformée de Laplace.
Dérivation d'une intégrale à paramètre	
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout x de J, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J\times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J, $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,.)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et vérifie : $$\forall x\in J,\qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J. Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$ pour tout x de J si $0\leqslant j\leqslant k-1$ et domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$.
Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.	⇆ PC : transformée de Fourier. ⇆ SI : théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.

Convexité

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est double :

- *introduire brièvement la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel ;*
- *étudier les fonctions convexes d'une variable réelle.*

Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures.
La notion de barycentre est introduite exclusivement en vue de l'étude de la convexité.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Parties convexes d'un espace vectoriel réel	
Barycentre. Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres à coefficients positifs.	⇆ PC et SI : centre de masse (ou centre de gravité).
b) Fonctions convexes d'une variable réelle	
Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x,y) de I^2 et tout λ de $[0,1]$: $$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$	Pour f convexe, les étudiants doivent connaître l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$ où $x_1,\dots,x_n$ sont des points de I et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs de somme 1.
Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes. Fonction concave.	Position relative du graphe et de ses cordes.
c) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I. Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.	Exemples d'inégalités de convexité.

Semaine prochaine : compacité, connexité par arcs, probabilités.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Théorème de continuité sous le signe intégrale. Énoncé du théorème de classe $\mathscr{C}^k$.

(ii) Théorème de classe $\mathscr{C}^1$ sous le signe intégrale.

(iii) Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, expression des dérivées, convexité, limites en 0^+ et $+\infty$.

(iv) Énoncés des caractérisations de la convexité. Démonstrations aux choix du colleur.

(v) Inégalité de Jensen (discrète).

(vi) **CCINP 29** : On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

  (a) Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

  On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

  (b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

  (c) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

(vii) **CCINP 30** :

(a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

(b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) i. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

ii. Résoudre (E).

(viii) **CCINP 34** : Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

(a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.

(b) Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(c) Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(d) Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

(ix) **CCINP 45** : **Les questions 1. et 2. sont indépendantes**.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

(a) i. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

ii. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.

(b) On pose : $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x-a\|$.

i. Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.

ii. On suppose que A est fermée et que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $d_A(tx+(1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

(x) **CCINP 50** : On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

(a) Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.

(b) Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

(c) Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.