Programme de colle – MP 1

Familles sommables

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Familles sommables	
Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme.	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ où F décrit l'ensemble des parties finies de I est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$.
Théorème de sommation par paquets : si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si : — Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable. — La série $\sum\Big(\sum_{i\in I_n} u_i\Big)$ converge. Dans ce cas : $$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} u_i\Big).$$	Démonstration hors programme.
Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$ l'est.
Somme d'une telle famille.	Pour une famille de réels, on se ramène à ses parties positive et négative.
Lorsque $I=\mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum u_n$.	
Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.	Démonstration non exigible.
Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets.	Démonstration hors programme. On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$.
Applications des familles sommables	
La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge et la série $\sum\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big)$ converge. Si tel est le cas $$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big) = \sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big).$$	
Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, alors : $$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$	On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille $(\lvert a_{m,n}\rvert)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	

Passage à la limite sous l'intégrale

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Passage à la limite sous l'intégrale	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert \mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et $$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I \lvert f_n\rvert$.

Bien sûr, on connaît aussi les théorèmes d'inversion dans le cas où les fonctions sont continues sur un segment et où il y a convergence uniforme.

Exemple de limite par découpage de l'intégrale.

Semaine prochaine : Intégrales à paramètres.

QUESTIONS DE COURS :

(i) Une suite de réels positifs est sommable si et seulement il s'agit du terme général d'une série convergente.

(ii) Énoncé précis parmi les théorèmes au programme : sommation par paquets (avec des termes réels positifs ou non), commutativité des termes d'une somme d'une famille sommable, théorèmes de Fubini pour les séries doubles, produit de Cauchy, théorème de convergence dominée, interversion série-intégrale dans le cas de convergence N_1.

(iii) **CCINP 19** :

- (a) Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln t \mathrm{d}t$.
- (b) Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t \mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

(iv) **CCINP 25** :

- (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n).

(v) **CCINP 26** : Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

- (a) Justifier que I_n est bien définie.
- (b) i. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
  ii. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- (c) La série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

(vi) **CCINP 27** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

- (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
- (b) Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
- (c) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
- (d) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(vii) **CCINP 50** : On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

- (a) Prouver que F est définie ~~et continue~~ sur $]0;+\infty[$.
- (b) Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
- (c) Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

(viii) **CCINP 49** : Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, \ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

(a) i. Justifier que la suite (a_n) est bornée.

ii. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

(b) i. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) \mathrm{d}t$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \left| f_n(t) \right| \mathrm{d}t$.

ii. Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.